Ueber eine besondere Cremona'sche Transformation.

Inaugural-Dissertation,

welche

nebst den beigefügten Thesen

mit Genehmigung einer hohen

Philosophischen Fakultät der Königl. Universität Breslau

zur

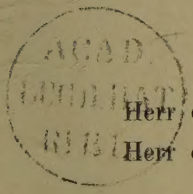
Erlangung der philosophischen Doktorwürde

am Donnerstag, den 24. Juli 1902, mittags 12¼ Uhr

in der Aula Leopoldina

öffentlich verteidigen wird

Wilhelm Wallstaff.



Opponenten:

Herr cand. math. **Heinrich Michalke,**
Herr cand. math. **Alfred Sebulke.**

Breslau
Buchdruckerei H. Fleischmann.
1902.

Meinen lieben Eltern.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, an dieser Stelle meinen hochverehrten Lehrern

Herrn Geh. Rat Prof. Dr. J. Rosanes

und

Herrn Geh. Rat Prof. Dr. R. Sturm

aufrichtig zu danken für die Anregung und die Förderung, die sie mir während meines Studiums und bei der Anfertigung dieser Arbeit haben zu teil werden lassen.

Einleitung

Die vorliegende Arbeit hat die Untersuchung einer speziellen Transformation 6. Ordnung zum Gegenstande.

In einer Ebene sind zwei Kegelschnittbüschel B_1 und B_2 festgelegt, die zwei Grundpunkte α und β gemeinsam haben; die weiteren Grundpunkte seien γ und δ sowie ε und φ. Es lassen sich nun die Punkte der Ebene durch die Bedingung einander zuordnen, dass jeder Punkt mit seinem zugeordneten sowohl auf einem und demselben Kegelschnitte von B_1 als auch von B_2 liegen soll*).

Wir erkennen dabei, dass jedem Punkte x dadurch eindeutig ein Punkt y entspricht, dass umgekekrt zu y sich wieder jener Punkt x als zugehöriger ergiebt. Es liegt also eine involutorische Cremona'sche Verwandschaft vor.

Im Folgenden sollen zunächst die wesentlichsten Eigenschaften dieser Transformation selbständig hergeleitet und dadurch an der Hand des vorliegenden Beispieles die be-

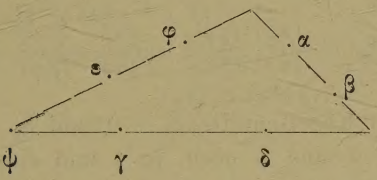
*) Diese Transformation lässt sich auch als ein spezieller Fall der von Herrn Geiser in Zürich behandelten Verwandschaft 8. Ordnung auffassen: Wenn von den neun Durchschnittspunkten zweier ebenen Kurven dritter Ordnung sieben fest bleiben, während der achte sich nach einem bestimmten Gesetze bewegt, nach welchem Gesetze ändert dann der neunte seine Lage? (Crelle's Journal, Band 67 1867. — C. F. Geiser: „Ueber zwei geometrische Probleme.") Die vorliegende Transformation ergiebt sich hieraus, sobald von den sieben festen Punkten zweimal je zwei mit einem und demselben fünften in gerader Linie liegen.

kannten allgemeinen Relationen verificiert werden. Daran schliesst sich die Behandlung einer Reihe von Spezialfällen sowie weiterer durch die Natur der Aufgabe nahegelegter Fragen, insbesondere auch die Uebertragung der Verwandtschaft auf eine Fläche zweiten Grades. Mehrfach ist eine und dieselbe Frage sowohl analytisch wie syntetisch behandelt worden; dies geschah einerseits, um die Macht beider Methoden zu erproben, andererseits aber, um eine erhöhte Gewähr für die Richtigkeit der gefundenen Resultate zu erhalten.

§ 1.

Entwicklung der Transformationsgleichungen.

Es seien α und β die gemeinsamen Grundpunkte der Kegelschnittbüschel B_1 und B_2; γ und δ seien die beiden weiteren Grundpunkte von B_1, ε und φ die von B_2, ferner sei ψ der Schnittpunkt der beiden Verbindungsgeraden $\gamma\delta$ und $\varepsilon\varphi$.



Wir wählen das Koordinatendreieck so, dass die Ecke $1 \mid 0 \mid 0$ in α, $0 \mid 1 \mid 0$ in β und $0 \mid 0 \mid 1$ in ψ liegt. Da γ und δ sowie ε und φ mit $0 \mid 0 \mid 1$ sich auf einer Geraden befinden, so müssen die beiden ersten Koordinaten von δ resp. φ mit denen von γ resp. ε übereinstimmen. Haben nun γ, δ, ε, φ die Koordinaten:

$$\gamma_1 \mid \gamma_2 \mid \gamma_3, \quad \gamma_1 \mid \gamma_2 \mid \delta_3, \quad \varepsilon_1 \mid \varepsilon_2 \mid \varepsilon_3, \quad \varepsilon_1 \mid \varepsilon_2 \mid \varphi_3,$$

so besitzen die einzelnen Verbindungsgeraden von je zweien der sieben Punkte folgende Gleichungen:

$$\alpha\beta \equiv X_3 = 0, \quad \gamma\delta \equiv X_1\gamma_2 - X_2\gamma_1 = 0, \quad \varepsilon\varphi \equiv X_1\varepsilon_2 - X_2\varepsilon_1 = 0$$
$$\alpha\psi \equiv X_2 = 0, \quad \alpha\gamma \equiv X_2\gamma_3 - X_3\gamma_2 = 0, \quad \alpha\varepsilon \equiv X_2\varepsilon_3 - X_3\varepsilon_2 = 0$$
$$\beta\psi \equiv X_1 = 0, \quad \beta\delta \equiv X_1\delta_3 - X_3\gamma_1 = 0, \quad \beta\psi \equiv X_1\varphi_3 - X_3\varepsilon_1 = 0$$

Die Gleichung jedes Kegelschnittes von B_1 ist von der Form:

$$(\alpha\beta)\cdot(\gamma\delta) - \varkappa\cdot(\alpha\gamma)\cdot(\beta\delta) = 0,$$

worin $(\alpha\beta)$, ... die linken Seiten der Gleichungen der Verbindungsgeraden $\alpha\beta$, ... sind. Soll ein solcher Kegelschnitt S_1 einen Punkt x $(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$ der Ebene enthalten, so muss

$$(\alpha\beta)' \cdot (\gamma\delta)' - \varkappa \cdot (\alpha\gamma)' \cdot (\beta\delta)' = 0$$

sein, worin $(\alpha\beta)'$, ... die Resultate der Substitution von x_1 für X_1 in $(\alpha\beta)$, ... sind. Die Gleichung dos durch x in B_1 bestimmten Kegelschnittes S_1 lautet also:

$$S_1 \equiv \frac{(\alpha\beta)\cdot(\gamma\delta)}{(\alpha\gamma)\cdot(\beta\delta)} = \frac{(\alpha\beta)'\cdot(\gamma\delta)'}{(\alpha\gamma)'\cdot(\beta\delta)'} .$$

In B_2 sondert x ebenfalls einen einzigen Kegelschnitt S_2 aus, dessen Gleichung analog ist:

$$S_2 \equiv \frac{(\alpha\beta)\cdot(\varepsilon\varphi)}{(\alpha\varepsilon)\cdot(\beta\varphi)} = \frac{(\alpha\beta)'\cdot(\varepsilon\varphi)'}{(\alpha\varepsilon)'\cdot(\beta\varphi)'}$$

Die beiden Kegelschnitte $S_1 = 0$ und $S_2 = 0$ schneiden sich ausser in α und β noch in x und einem sich mit x ändernden Punkte y $(y_1 \mid y_2 \mid y_3)$, dessen Koordinaten als Funktionen von x_i darzustellen sind. Fasst man $S_1 = 0$ und $S_2 = 0$ als Bestimmungsgleichungen für $X_i \equiv y_i$ auf, so sind die beiden Lösungen die Koordinaten der ausserhalb von α und β gelegenen Schnittpunkte x und y. Diese Gleichungen lauten:

$$\frac{y_3(y_1\gamma_2 - y_2\gamma_1)}{(y_1\delta_3 - y_3\gamma_1)(y_2\gamma_3 - y_3\gamma_2)} = \frac{x_3(x_1\gamma_2 - x_2\gamma_1)}{(x_1\delta_3 - x_3\gamma_1)(x_2\gamma_3 - x_3\gamma_2)}$$

$$\frac{y_3(y_1\varepsilon_2 - y_2\varepsilon_1)}{(y_1\varphi_3 - y_3\varepsilon_1)(y_2\varepsilon_3 - y_3\varepsilon_2)} = \frac{x_3(x_1\varepsilon_2 - x_2\varepsilon_1)}{(x_1\varphi_3 - x_3\varepsilon_1)(x_2\varepsilon_3 - x_3\varepsilon_2)}$$

Setzt man darin:

$g_1 \equiv x_1\gamma_2 - x_2\gamma_1$, $g_3 \equiv x_1\delta_3 - x_3\gamma_1$, $g_5 \equiv x_2\gamma_3 - x_3\gamma_2$,

$g_2 \equiv x_1\varepsilon_2 - x_2\varepsilon_1$, $g_4 \equiv x_1\psi_3 - x_3\varepsilon_1$, $g_6 \equiv x_2\varepsilon_3 - x_3\varepsilon_2$

so folgt:

$y_3^2 \cdot \gamma_1\gamma_2 \cdot x_3 g_1 - y_2 y_3 \cdot \gamma_1 \cdot s_1 - y_1 y_3 \cdot \gamma_2 \cdot s_3 + y_1 y_2 \cdot \gamma_3\delta_3 \cdot x_3 g_1 = 0,$

$y_3^2 \cdot \varepsilon_1\varepsilon_2 \cdot x_3 g_2 - y_2 y_3 \cdot \varepsilon_1 \cdot s_2 - y_1 y_3 \cdot \varepsilon_3 \cdot s_4 + y_1 y_2 \cdot \varepsilon_3\varphi_3 \cdot x_3 g_2 = 0$

worin noch:

$$s_1 \equiv \gamma_3 g_1 x_3 - g_3 g_5, \quad s_3 \equiv \delta_3 x_3 g_1 + g_2 g_5,$$
$$s_2 \equiv \varepsilon_3 g_2 x_3 - g_4 g_6, \quad s_4 \equiv \varphi_3 x_3 g_2 + g_4 g_6 \text{ ist.}$$

Eliminieren wir nun hieraus y_3^2 und andererseits $y_1 y_2$, wobei wir zur Abkürzung folgende Grössen einführen:

$$c_1 = \varepsilon_1 \gamma \cdot (\gamma_2 g_1 s_2 - \varepsilon_2 g_2 s_1), \quad c_2 = \varepsilon_2 \gamma_2 (\gamma_1 g_1 s_4 - \varepsilon_1 g_2 s_3),$$
$$c_\alpha = \gamma_2 \varepsilon_3 \varphi_3 g_2 s_3 - \varepsilon_2 \gamma_3 \delta_3 g_1 s_4, \quad c_\beta = \gamma_1 \varepsilon_3 \varphi_3 g_2 s_1 - \varepsilon_1 \gamma_3 \delta_3 g_1 s_4,$$
$$f \equiv \varepsilon_1 \varepsilon_2 \gamma_3 \delta_3 - \gamma_1 \gamma_2 \varepsilon_3 \varphi_3,$$

so erhalten wir zunächst:

$$y_3^2 \cdot x_3 g_1 g_2 \cdot f + y_2 y_3 \cdot c_\beta + y_1 y_3 \cdot c_\alpha = 0$$

und

$$y_1 y_2 \cdot x_3 g_1 g_2 \cdot f + y_2 y_3 \cdot c_1 + y_1 y_3 \cdot c_2 = 0$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$y_1 = - \frac{y_2 c_\beta + y_3 x_3 g_1 g_2 f}{c_\alpha}$$

und auch:

$$y_2 = - \frac{y_1 c_\alpha + y_3 x_3 g_1 g_2 f.}{c_\beta}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die zweite Gleichung erhalten wir:

$$y_1^2 \cdot g_1 g_2 c_\alpha x_3 \cdot f + y_1 y_3 (g_1^2 g_2^2 x_3^2 f^2 + c_1 c_\alpha - c_2 c_\beta) + y_3^2 g_1 g_2 c_1 x_3 \cdot f = 0$$

und

$$y_2^2 \cdot g_1 g_2 c_\beta x_3 \cdot f + y_2 y_3 (g_1^2 g_2^2 x_3^2 f^2 = c_2 c_\beta - c_1 c_\alpha) + y_3^2 g_1 g_2 c_2 x_3 \cdot f = 0.$$

Diese Gleichungen liefern die Koordinaten derjenigen beiden Punkte, in denen sich $S_1 = 0$ und $S_2 = 0$ ausser in α und β noch schneiden. Da $x(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$ einer dieser Punkte ist, so muss

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

eine Lösung der ersten und

$$\frac{y_2}{y_3} = \frac{x_2}{x_3}$$

eine der zweiten Gleichung sein. Die linken Seiten beider Gleichungen werden sich daher in je zwei Faktoren zerlegen, von denen der eine $y_1 x_3 - y_3 x_1$ bei der ersten und $y_2 x_3 - y_3 x_2$ bei der zweiten lautet. Durch Vergleichung der Koëffizienten ergiebt sich für die zweiten Faktoren:

$$y_1 \cdot c_\alpha g_1 g_2 \cdot f - y_3 \cdot \frac{x_3 g_1 g_2 f c_1}{x_1},$$

$$y_2 \cdot c_\beta g_1 g_2 \cdot f - y_3 \cdot \frac{x_3 g_1 g_2 f c_2}{x_2},$$

woraus

$$\frac{y_1}{y_3} = \frac{c_1 x_3}{c_\alpha x_1} \text{ und } \frac{y_2}{y_3} = \frac{c_2 x_3}{c_\beta x_2} \text{ folgt.}$$

Ehe wir hieraus die Transformationsgleichungen entnehmen, wollen wir die Grössen c_1, c_2, c_α, c_β untersuchen. Nach den Definationsgleichungen stellen $c_1 = 0$, ... $c_\beta = 0$ Kurven dritter Ordnung dar, die durch jeden der sieben Punkte α, ... ψ, laufen. Denn $s_1 = 0$ und $s_3 = 0$ sind Kegelschnitte von B_1, $s_2 = 0$ und $s_4 = 0$ gehören dem Büschel B_2 an und $g_1 = 0$ stellt die Gerade $\gamma\delta$ dar, während $g_2 = 0$ $\varepsilon\varphi$ bedeutet. Die Koordinaten eines jeden der sieben festen Punkte annullieren daher die linken Seiten der obigen vier Gleichungen.

Die Kurve $c_1 = 0$ enthält aber alle Punkte der Geraden $x_1 = 0$. Denn setzt man in ihrer Gleichung $x_1 = 0$, so lautet sie:

$$c_1 = \varepsilon_1 \gamma_1 [\gamma_2 \cdot (-x_2 \gamma_1) \cdot (-x^2{}_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2) - \varepsilon_2 (-x_2 \varepsilon_1)(-x_3{}^2 \gamma_1 \gamma_2)] \equiv 0$$

Infolgedessen zerfällt die Kurve in die Gerade $\psi\beta$. $x_1 = 0$ und den durch α, γ, δ, ε und φ gehenden Kegelschnitt $s_\alpha = 0$.

Analog wie:

$$c_1 = \varepsilon_1 \gamma_1 \cdot x_1 \cdot s_\alpha$$

ist, ergiebt sich:

$$c_2 = \varepsilon_2 \gamma_2 \cdot x_2 \cdot s_\beta,$$

worin $s_\beta = 0$ den durch β, γ, δ, ε und φ laufenden Kegelschnitt bedeutet.

In $g_1 s_2$ hat $x_2^2 x_3$ den Koëffizienten $\gamma_1 \varepsilon_3 \varphi_3$, in $g_2 s_1$ aber $\varepsilon_1 \gamma_3 \delta_3$. Deshalb enthält $c_\beta = \gamma_1 \varepsilon_3 \varphi_3 g_2 s_1 - \varepsilon_1 \gamma_3 \delta_3 g_1 s_2$ kein Glied mit x_2^2 mehr, d. h. $\beta\,(0 \mid 1 \mid 0)$ ist Doppelpunkt der Kurve dritter Ordnung $c_\beta = 0$, die durch ihn und ihre sechs einfachen Punkte α, γ, δ, ε, φ, ψ eindeutig bestimmt ist.

Analog erkennt man, dass die Kurve $c_\alpha = 0$ in α einen Doppelpunkt hat.

Die anfangs für $\frac{y_1}{y_3}$ und $\frac{y_2}{y_3}$ gewonnenen Werte nehmen nun die Form an:

$$\frac{y_1}{y_3} = \frac{x_3 \cdot s_\alpha \cdot \varepsilon_1 \gamma_1}{c_\alpha},$$

$$\frac{y_2}{y_3} = \frac{x_3 \cdot s_\beta \cdot \varepsilon_2 \gamma_2}{c_\beta}$$

Daraus folgt:

$$y_1 = \varepsilon_1 \gamma_1 \cdot x_3 \cdot s_\alpha \cdot c_\beta$$

$$y_2 = \varepsilon_2 \gamma_2 \cdot x_3 \cdot s_\beta \cdot c_\alpha$$

$$y_3 = c_\alpha \cdot c_\beta$$

Die Koordinaten des Punktes y lassen sich somit als ganze und rationale Funktionen 6. Grades von denen des Punktes x darstellen.

Jedem Punkte x der Ebene ist eindeutig ein Punkt y zugewiesen als vierter Schnittpunkt der beiden durch x in B_1 und B_2 festgelegten Kegelschnitte. Jedem so erhaltenen Punkte y entspricht in derselben Weise wieder jener Punkt x. Für x_i ergeben sich wegen dieser involutorischen Zuordnung Funktionen 6. Grades von y_i, die aus den soeben gefundenen durch Vertauschung von x_i mit y_i und umgekehrt hervorgehen.

§ 2.

Bestimmung der Hauptpunkte und Hauptkurven.

Durchläuft nun y die Gerade

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 = 0,$$

so bewegt sich der jeweilig entsprechende Punkt x auf der Kurve:

$$a_1 \cdot \varepsilon_1 \gamma_1 \cdot x_3 s_\alpha c_\beta + a_2 \cdot \varepsilon_2 \gamma_2 \cdot x_3 s_\beta c_\alpha + a_3 \cdot c_\alpha c_\beta = 0,$$

wobei wir von jetzt an x_i als laufende Koordinaten ansehen wollen. Diese Kurve 6. Ordnung geht durch alle sieben Punkte $\alpha, \beta, \ldots, \psi$, deren Koordinaten sowohl c_α als c_β annullieren und daher auch der obigen Gleichung genügen. Da $\gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$ auch Punkte von $s_\alpha = 0$ und $s_\beta = 0$ sind, so sind jene vier Punkte Doppelpunkte der Kurve 6. Ordnung. α ist Doppelpunkt auf $c_\alpha = 0$, ferner ein einfacher Punkt von $x_2 = 0$, $s_\alpha = 0$, $c_\beta = 0$; seine Koordinaten annullieren die linke Seite also sogar dreifach. Dasselbe thun die Koordinaten von β, der ein einfacher Punkt von $x_3 = 0$, $s_\beta = 0$, $c_\alpha = 0$ und Doppelpunkt von $c_\beta = 0$ ist. α und β sind daher dreifache Punkte auf der Kurve 6. Ordnung. Durch ψ dagegen geht die Kurve nur einmal.

Bewegt sich die Gerade:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

in der Ebene, sind also die α_i variabel, so stellt die Gleichung

$$a_1 \cdot \varepsilon_1 \gamma_1 \cdot x_3 \cdot s_\alpha \cdot c_\beta + a_2 \cdot \varepsilon_2 \gamma_2 \cdot x_3 \cdot s_\beta \cdot c_\alpha + a_3 c_\alpha c_\beta = 0$$

das Netz der Kurven 6. Ordnung dar, das dem Strahlenfelde der Ebene entspricht. Alle jene Kurven gehen dreimal durch α und β, zweimal durch γ, δ, ε, φ und einmal durch ψ. Das erwähnte Netz wird durch die sieben Punkte $\alpha, \ldots \psi$ in der angeführten Vielfachheit eindeutig bestimmt.

Ausser ihnen, die 35 von den möglichen Schnittpunkten zweier Kurven des Netzes repräsentieren, haben die letzteren dann nur noch einen variablen gemeinsam; dieser entspricht dem Schnittpunkte derjenigen beiden Geraden, aus denen jene Kurven 6. Ordnung hervorgingen.

Die vorliegende Verwandschaft ist eindeutig, rational und umkehrbar, ferner findet in ihr durchweg involutorisches Entsprechen statt; sie ist eine involutorische Cremonasche Transformation 6. Ordnung und besitzt:

in α und q zwei dreifache,

in γ, δ, ε und φ vier doppelte Hauptpunkte und

in ψ einen einfachen Hauptpunkt,

wie soeben gezeigt wurde.

Dem gemeinsamen Elemente zweier Geraden, d. h. ihrem Schnittpunkt, entspricht immer das Gebilde, das die beiden zugehörigen Kurven 6. Ordnung ausserhalb der Hauptkurven noch gemeinsam haben, d. h. ihr 36. Schnittpunkt. Einer Geraden durch α ist die Kurve

$$c_\alpha(a_2\gamma_2\varepsilon_2 x_3 s_\beta + a_3 c_\beta) = 0$$

zugeordnet, die in die beiden Kurven dritter Ordnung

$$c_\alpha = 0 \text{ und } a_2\gamma_2\varepsilon_2 \cdot x_3 s_\beta + a_3 c_\beta = 0$$

zerfällt. Einer anderen Geraden durch α ist analog die in

$$c_\alpha = 0 \text{ und } b_2\gamma_2\varepsilon_2 \cdot x_3 s_\beta + b_3 c_\beta = 0$$

degenerierende Kurve zugewiesen. Die beiden erzeugenden Geraden treffen sich in α, diesem Punkte ist das Gebilde zugeordnet, welches die beiden Kurven 6. Ordnung gemeinsam haben, d. h. die Gesamtheit der Punkte von $c_\alpha = 0$. Analog entspricht β das Continuum der Punkte von $c_\beta = 0$.

Jedem der beiden dreifachen Hauptpunkte gehört als Hauptkurve die Kurve dritter Ordnung zu, die ihn selbst zum Doppelpunkte hat, und je einmal durch die übrigen sechs geht.

Als eigentliches der Geraden $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ entsprechendes Gebilde bleibt die Kurve dritter Ordnung:

$$a_2\varepsilon_2\gamma_2 x_3 s_\beta + a_3 c_\beta = 0$$

übrig. Sieht man a_2 und a_3 als variabel an, so folgt daraus:

Den Strahlen des Büschels um einen der dreifachen Hauptpunkte gehören die Kurven dritter Ordnung eines Büschels zu; alle haben im anderen dreifachen

Punkte einen Doppelpunkt und gehen je einmal durch den ersten dreifachen sowie die vier doppelten Hauptpunkte*).

Bewegt sich x auf der Verbindungsgeraden eines dreifachen und eines doppelten Hauptpunktes, z. B. auf $\alpha\gamma$, so zerfallen alle Kegelschnitte von B_1 in $\alpha\gamma$ und $\beta\delta$; der zu x zugehörige Punkt y muss daher $\beta\delta$ durchlaufen. Die nach obigem Satze der Geraden $\alpha\gamma$ zugewiesene Kurve dritter Ordnung besteht deshalb aus $\beta\delta$ und den durch α, β, γ, ε, φ gehenden Kegelschnitt. Ebenso zerfällt die der Geraden $\beta\gamma$ entsprechende Kurve in $\alpha\delta$ und denselben Kegelschnitt. Der letztere ist also die zu γ gehörige Hauptkurve.

Jedem der vier doppelten Hauptpunkte entspricht als Hauptkurve der Kegelschnitt, den er aus demjenigen Büschel von B_1 resp. B_2 ausscheidet, zu dessen Grundpunkten er selbst nicht gehört.

Als eigentliche $\alpha\gamma$ resp. $\beta\gamma$ zugewiesene Kurven bleiben nur die Geraden $\beta\delta$ resp. $\alpha\delta$ übrig; d. h.

Der Verbindungsgeraden eines dreifachen und eines doppelten Hauptpunktes entspricht die Verbindungsgerade des zweiten dreifachen mit demjenigen doppelten, der demselben Büschel B_1 resp. B_2 als Grundpunkt angehört**).

Der Geraden $\alpha\psi$ $x_2 = 0$ entspricht die Kurve 6. Ordnung, die in:

$$c_\alpha = 0, \quad x_3 = 0, \quad s_\beta = 0$$

zerfällt. Die zu $\beta\psi$ $x_1 = 0$ Kurve zerspaltet sich in

$$c_\beta = 0, \quad x_3 = 0, \quad s_\alpha = 0.$$

Dem Schnittpunkte ψ beider Geraden ist daher $x_3 = 0$ zugeordnet.

Dem einfachen Hauptpunkte entspricht als Hauptkurve die Verbindungsgerade der beiden dreifachen Punkte.

---

*) Vgl. § 3 No. 1.

**) Vgl. § 3 No. 4.

§ 3.

Ableitung der gefundenen Beziehungen auf synthetisch-geometrischem Wege.

Durch einen beliebigen Punkt x der Ebene wird in B_1 und B_2 je ein Kegelschnitt festgelegt; beide schneiden sich ausser in α, β und x noch in einem Punkte y. Um die Kurve zu ermitteln, auf der y sich bewegt, wenn x eine Gerade g durchläuft, wählen wir in der Ebene noch eine ganz beliebige Gerade l und untersuchen, wie oft der dem Punkte x entsprechende Punkt y auf l zu liegen kommt. Diese Punkte sind die Schnitte von l mit der von y erfüllten Kurve; ihre Anzahl giebt die Ordnung der letzteren an.

Jedes der beiden Büschel B_1 und B_2 schneidet auf l eine Punktinvolution ein. Ein Punkt ξ, der zur ersten von beiden gehört, bestimmt einen einzigen Kegelschnitt im Büschel B_1. Dieser begegnet g in zwei Punkten, die je einen Kegelschnitt aus B_2 aussondern. Diese beiden Kegelschnitte endlich treffen l in vier Punkten, die so dem Punkte ξ zugeordnet sind. Analog erkennt man sofort, dass auch jedem Punkte η der zweiten Involution vier Punkte der ersten entsprechen. Die beiden Punktreihen befinden sich deshalb in einer Korrespondenz [4, 4].

Die 8 Coincidenzelemente dieser Verwandschaft sind die Punkte, die l mit der erzeugten Kurve gemeinsam hat; die letztere ist somit von der 8ten Ordnung. Unter diesen Coincidenzelementen befinden sich aber stets der Schnittpunkt ρ von l und g sowie σ von l und $\alpha\beta$.

Durch ρ ist ein Kegelschnitt in B_1 festgelegt, der g ausser in ρ noch in ρ' trifft. ρ und ρ' bestimmen zwei Kegelschnitte in B_2, die l in den vier zu ρ gehörigen Punkten schneiden. Einer davon fällt immer mit ρ zusammen, so dass ρ ein Coincidenzpunkt ist.

σ dagegen sondert in B_1 den zerfallenden Kegelschnitt aus, der aus den Geraden $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ besteht, die g in μ und ν treffen. ν bestimmt dann einen Kegelschnitt in B_2,

der durch μ in B_2 festgelegte aber zerfällt in das Geradenpaar $\alpha\beta$ und $\varepsilon\varphi$. l wird dadurch in zwei Punkten geschnitten, von denen der erste wieder nach σ fällt. Mithin ist auch σ als Coincidenzelement erkannt worden.

Von der zu g gehörigen Kurve 8ter Ordnung C^8 sondern sich also stets die beiden Geraden g und $\alpha\beta$ ab. Als eigentlich entsprechendes Gebilde bleibt nur eine Kurve 6ter Ordnung C^6 übrig.

Um die Eigenschaften von C^6 zu ermitteln, geben wir der Geraden l besondere Lagen. Läuft l durch einen der beiden gemeinsamen Grundpunkte von B_1 und B_2, etwa durch α, so schneiden B_1 und B_2 parabolische Involutionen auf l ein, deren gemeinsamer Centralpunkt α ist. Ein beliebiger Punkt ξ von l, als zur ersten gehörig betrachtet, bestimmt einen Kegelschnitt in B_1, durch dessen zwei Schnittpunkte mit g zwei Kurven in B_2 festgelegt werden. Von ihren Schnittpunkten mit l fällt aber immer je einer wieder nach α, so dass dem Punkte ε nur die beiden übrig bleibenden entsprechen. Umgekehrt sind auch jedem Punkte der zweiten Involution nur zwei Punkte der ersten zugewiesen. Zwischen beiden Punktreihen besteht daher eine Korrespondenz [2, 2]. Ihre vier Coincidenzelemente sind die vier von α verschiedenen Schnitte von C^8 mit l. Die vier übrigen müssen daher in α liegen, d. h. α ist ein vierfacher Punkt von C^8. Da nun $\alpha\beta$ wohl zu C^8, nicht aber zu C^6 gehört, so ist α ein dreifacher Punkt von C^6. Analog erkennen wir, dass C^6 auch dreimal durch β geht.

Legen wir l durch einen von α und β verschiedenen Grundpunkt der beiden Büschel, z. B. durch γ, so schneidet die Gesamtheit der Kegelschnitte von B_1 eine parabolische Involution mit dem Centralpunkte γ auf l ein. Ein beliebiger Punkt ε bestimmt einen Kegelschnitt in B_1, dieser liefert zwei Punkte auf g und somit zwei Kegelschnitte von B_2, die l in den vier zu γ gehörigen Punkten treffen; alle vier sind von γ verschieden. Ein Punkt η der zweiten Reihe auf l sondert aus B_2 einen Kegelschnitt aus, dessen Schnitte mit g zwei Elemente von B_1 festlegen. Aber diese beiden

Kurven schneiden l in je zwei Punkten, von denen immer einer mit γ zusammenfällt. Jedem Punkte der ersten Reihe sind also vier Punkte der zweiten, jedem der zweiten dagegen nur zwei der ersten zugeordnet. Zwischen beiden Reihen besteht somit eine Verwandschaft [2, 4]. Ihre sechs Coincidenzelemente sind die von γ verschiedenen Schnitte von C^8 mit l; γ muss die zwei noch übrigen in sich vereinigen. Da aber γ weder auf g noch aut $\alpha\beta$ liegt, so ist er ein Doppelpunkt von C^6. Dieselbe Eigenschaft besitzen analog die Punkte δ, ε, φ.

Geht l schliesslich durch den Schnittpunkt ψ von $\gamma\delta$ und $\varepsilon\varphi$, so schneiden B_1 und B_2 auf l zwei Punktreihen ein, die sich in einer Korrespondenz [4, 4] befinden. Unter den acht Coincidenzelementen befindet sich stets ψ. Denn ψ sondert aus B_1 den zerfallenden Kegelschnitt aus, der aus $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ besteht, wobei g von $\gamma\delta$ in λ_1, von $\alpha\beta$ in λ_2 getroffen wird. Während der durch λ_1 in B_2 bestimmte Kegelschnitt in zwei Punkten sehneidet, die keine spezielle Lage einnehmen, degeneriert der durch λ_2 festgelegte in die Geraden $\varepsilon\varphi$ und $\alpha\beta$, die l in ψ und einem weiteren Punkte schneiden. ψ ist daher einer der sechs von p und σ verschiedenen Coincidenzpunkte, d. h. ein einfacher Punkt auf C^6.

Einer beliebigen Geraden der Ebene entspricht in der vorliegenden Verwandschaft stets eine Kurve 6ter Ordnung, die je dreimal durch α und β, zweimal durch γ, δ, ε, φ und einmal durch ψ läuft.

Während einem beliebigen Punkte der Ebene immer nur ein einziger anderer entspricht, ist jedem der sieben Fundamentalpunkte die Gesamtheit der Punkte einer bestimmten Kurve zugewiesen, deren Ordnung mit seiner Vielfachheit übereinstimmt.

Rückt x in einen der dreifachen Punkte z. B. nach α, so bestimmt jede seiner unendlich nahen Lagen an α eine gewisse Richtung durch α. Der zugeordnete Punkt ist nun der letzte Schnittpunkt zweier Kegelschnitte von B_1 und B_2, die sich in α in der gegebenen Richtung berühren. Alle so gefundenen Punkte α' dann erfüllen eine Kurve dritter

Ordnung. Denn ist l wieder eine ganz beliebige Gerade, so schneiden die beiden Kegelschnittbüschel zwei Punktinvolutionen auf ihr ein. Jeder Punkt ξ der ersten sondert einen einzigen Kegelschnitt in B_1 aus. Dann ist in B_2 nur ein einziger vorhanden, der ihn in α berührt; er trifft l in den beiden zu ξ gehörigen Punkten η_{11} und η_{12}. Analog sind jedem Punkte der zweiten Involution zwei Punkte der ersten zugeordnet. Zwischen den beiden Punktreihen auf l besteht daher eine Verwandtschaft [2, 2]. Jeder der vier Coincidenzpunkte ist einer der Punkte α', d. h. α' erfüllt eine Kurve 4ter Ordnung C^4.

Eines der vier Coincidenzelemente ist jedoch stets der Schnittpunkt σ von l und $\alpha\beta$. Denn σ bestimmt als Punkt der ersten Reihe den in $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ zerfallenden Kegelschnitt von B_1; der ihn in α berührende Kegelschnitt von B_2 degeneriert in $\alpha\beta$ und $\varepsilon\varphi$. Diese Geraden treffen l in den zu σ gehörigen Punkten; einer von ihnen fällt aber mit σ zusammen. Von C^4 scheiden sich mithin die Punkte der Geraden $\alpha\beta$ ab. Als eigentliches dem Punkte α entsprechendes Gebilde bleibt nur noch eine Kurve dritter Ordnung C_α zurück.

C_α geht zunächst durch jeden der vier Punkte γ, δ, ε, φ. Legt man nämlich l durch einen von ihnen, z. B. durch γ, so entstehen durch B_1 und B_2 wieder zwei parabolische Involutionen auf l. Ein Punkt ξ der ersten Reihe bestimmt einen Kegelschnitt in B_1; diesen berührt in α ein einziger von B_2, der l in den beiden zu ξ gehörigen Punkten η_{11} und η_{12} schneidet. Auch ein Punkt η_1 der zweiten Reihe sondert einen Kegelschnitt aus B_2 aus, der analog einen einzigen in B_1 festlegt. Der letztere trifft aber l in zwei Punkten, von denen einer mit γ zusammenfällt. Einem Punkte der zweiten Involution entspricht somit nur ein einziger von γ verschiedener der ersten. Zwischen beiden Punktreihen besteht eine Verwandtschaft [1, 2], deren drei Coincidenzelemente die von γ verschiedenen Schnitte von C^4 und l sind. Der vierte Schnittpunkt liegt also in γ. Da

nun γ kein Punkt von $\alpha\beta$ ist, so muss er ein einfacher Punkt von C_α sein.

ψ gehört der Kurve ebenfalls an. Denn legen wir l durch ihn, so schneiden B_1 und B_2 auf ihr zwei Punktreihen ein, die sich in einer Verwandtschaft [2, 2] befinden. Eines der vier darin vorhanden Coincidenzelemente ist jedoch ψ selbst. Er scheidet aus B_1 den in $\psi\delta$ und $\alpha\beta$ zerfallenden Kegelschnitt aus; der zugehörige in B_2 degeneriert in $\alpha\beta$ und $\varepsilon\varphi$, so dass von den Schnitten mit l wieder einer nach ψ zu liegen kommt. Da nun ψ nicht der Geraden $\alpha\beta$ angehört, so muss er auf C_α liegen.

Durch β läuft die Kurve ebenfalls einmal. Legen wir l durch β, so schneiden B_1 und B_2 parabolische Involutionen auf l ein, deren gemeinsamer Centralpunkt β ist. Ein Punkt ξ der ersten bestimmt einen Kegelschnitt von B_1 und damit auch einen einzigen ihn berührenden von B_2, der l ausser in β nur noch in einem anderen Punkte trifft. Analog ist jedem Punkte der zweiten Involution nur ein einziger der ersten zugeordnet. Die beiden Coincidenzelemente der so hergestellten Verwandtschaft [1, 1] sind die von β verschiedenen Schnitte von l mit C^4. Die beiden fehlenden müssen in β liegen. Da er jedoch ein Punkt der abgesonderten Geraden $\alpha\beta$ ist, so geht C_α nur noch einmal durch ihn.

In α jedoch hat C_α einen Doppelpunkt. Legt man l durch α, so werden von B_1 und B_2 wieder parabolische Involutionen mit dem gemeinsamen Centralpunkte α auf l ausgeschnitten. Ein beliebiger Punkt ξ der ersten bestimmt einen Kegelschnitt von B_1 und dieser einen in B_2. Von dessen Schnitten mit l fällt einer nach α, so dass ξ nur ein einziger anderer Punkt zugewiesen ist. Ebenso entspricht jedem Punkte der zweiten Reihe nur ein Punkt der ersten. Von den zwei Coincidenzelementen dieser Verwandtschaft [1, 1] fällt eins noch nach α in den an α in der Richtung von l unendlich benachbarten Punkt ξ_1. ξ_1 sondert nämlich aus B_1 den Kegelschnitt aus, der l in α berührt. Der zugehörige in B_2 berührt l ebenfalls und hat ausser α mit l nur noch ξ_1 gemeinsam. Folglich liegt der zu ξ_1 zugeordnete Punkt

wieder in ξ_1, d. h. ξ_1 ist ein Coincidenzpunkt. C^4 hat also mit l in α drei Punkte gemeinsam, einer davon ist als Punkt von $\alpha\beta$ anzusehen, C_α besitzt daher in α einen Doppelpunkt

Den einfach unendlich vielen Richtungen durch einen der dreifachen Hauptpunkte entsprechen die einfach unendlich vielen Punkte der Kurve dritter Ordnung, die ihn selbst zum Doppelpunkte hat und durch die sechs übrigen Hauptpunkte läuft.

Rückt x an einen der doppelten Hauptpunkte unendlich nahe heran, so bestimmt jede dieser Lagen einen Kegelschnitt in dem Büschel, zu dessen Grundpunkten er gehört. Im anderen Büschel aber sondert x stets einen und denselben Kegelschnitt aus, auf dem der zu x zugeordnete Punkt y liegt.

Den einfach unendlich vielen Richtungen durch einen der doppelten Hauptpunkte entsprechen die einfach unendlich vielen Punkte des Kegelschnittes, den er aus demjenigen Büschel ausscheidet, zu dessen Grundpunkten er selbst nicht gehört.

Jede der unendlich nahen Lagen von x an ψ bastimmt einen zerfallenden Kegelschnitt in jedem der beiden Büschel. Der vierte ψ zugeordnete Schnittpunkt zweier solchen wird auf der ihnen gemeinsamen Geraden $\alpha\beta$ unbestimmt.

Dem einfachen Hauptpunkte entsprechen die Punkte der Verbindungsgeraden der beiden dreifachen Hauptpunkte.

§ 5.

Einander zugeordnete Gebilde.

In der vorliegenden Transformation entspricht einer Kurve n^{ter} Ordnung stets eine Kurve $6n^{ter}$ Ordnung, die $3n$mal durch α sowie β, je $2n$mal durch γ, δ, ε φ und $n$mal durch ψ geht. Läuft jedoch eine Kurve n^{ter} Ordnung $\varkappa$mal durch einen λfachen Hauptpunkt, so zerfällt die erzeugte Kurve $6n^{ter}$ Ordnung in die $\varkappa$fach zu zählende Kurve λ^{ter} Ordnung, die zu jenem Hauptpunkte gehört, und in

eine Kurve $(6n-\lambda\varkappa)$ter Ordnung. Während die vollständige Kurve $n\lambda$mal durch jenen Hauptpunkt läuft, geht die letztere nur $(n\lambda-\varkappa\nu)$mal durch ihn, wobei ν die Zahl der Vielfachheit des Hauptpunktes auf der ihm entsprechenden Hauptkurve bedeutet.

Um die Aufsuchung von solchen Kurven zu erleichtern, die speziellen Linien zugewiesen sind, werde ich für jeden folgenden Satz ein kleines Schema aufstellen, an dem sich die Ordnung der verlangten Kurve sowohl wie die Zahl ihrer Durchgänge durch die einzelnen Hauptpunkte erkennen lässt. Die erste Zeile enthält zunächst die Ordnungszahl der erzeugenden Kurve, daneben die der vollständigen erzeugten die so oft durch denjenigen der Punkte α, β, ..., ψ laufen muss, wie die unter dem betreffenden Buchstaben stehende Zahl angiebt. Für eine Gerade lautet sie:

	α	β	γ	δ	ε	φ	ψ
1	6	3	3	2	2	2	1

Die zweite Zeile nennt zuerst den Hauptpunkt, durch den die erzeugende Linie geht, dann die Ordnung der durch ihn abgesonderten Hauptkurve nebst der Zahl der Vielfachheit obiger Punkte auf ihr. Für eine Gerade durch α würde sie nun lauten:

α	3	2	1	1	1	1	1

Die zu der eigentlich entsprechenden übrig bleibenden Kurve gehörigen Ziffern finden wir jetzt einfach dadurch dass wir die Zahlen der zweiten Zeile von denen der ersten subtrahieren. So ergiebt sich im vorliegenden Falle:

	3	1	2	1	1	1	0

Diese Zeile deutet der folgende Satz:

1. Den Strahlen des Büschels um einen der dreifachen Hauptpunkte entsprechen die Kurven dritter Ordnung

eines Büschels, dessen Grundpunkte die dreifachen und die doppelten Hauptpunkte sind; der jeweilige zweite dreifache ist dabei ein Doppelpunkt für alle Kurven des Büschels*).

Analog ergeben sich folgende Zuordnungen:

		α	β	γ	δ	ε	φ	ψ
1	6	3	3	2	2	2	2	1
γ	2	1	1	1	0	1	1	0
	4	2	2	1	2	1	1	1

2. Jeder Geraden durch einen der doppelten Hauptpunkte entspricht eine Kurve 4ter Ordnung; diese hat je einen Doppelpunkt in den beiden dreifachen und demjenigen doppelten Hauptpunkte, der auf der Verbindungsgeraden des obigen mit dem einfachen liegt; ferner geht sie je einmal durch jeden der vier übrigen.

		α	β	γ	δ	ε	φ	ψ
1	6	3	3	2	2	2	2	1
ψ	1	1	1	0	0	0	0	0
	5	2	2	2	2	2	2	1

3. Den Strahlen des Büschels um den einfachen Hauptpunkt entsprechen die Kurven 5ter Ordnung eines Büschels, dessen Grundpunkte die sechs übrigen Hauptpunkte als Doppelpunkte, er selbst ausserdem als einfacher Punkt bilden.

Läuft eine Linie durch mehrere Hauptpunkte, so spalten sich von der erzeugten Kurve alle zu ihnen gehörigen Hauptkurven so oft ab, wie die Linie den betreffenden Hauptpunkt enthält. Im Schema treten dann statt der zweiten Zeile mehrere auf; von den Ziffern der ersten Zeile ist nun immer die Summe der darunter angeführten zu subtrahieren. Dadurch ergeben sich folgende Sätze:

---

*) Vgl. § 2, Seite 16.

		α	β	γ	δ	ε	φ	ψ
1	6	3	3	2	2	2	2	1
α	3	2	1	1	1	1	1	1
γ	2	1	1	1	0	1	1	0
	1	0	1	0	1	0	0	0

4. Der Verbindungsgeraden eines dreifachen Hauptpunktes mit einem doppelten entspricht die Verbindungsgerade des anderen dreifachen mit demjenigen doppelten, der auf der Verbindungslinie des ersten doppelten mit dem einfachen liegt*).

		α	β	γ	δ	ε	φ	ψ
1	6	3	3	2	2	2	2	1
α	3	2	1	1	1	1	1	1
ψ	1	1	1	0	0	0	0	0
	2	0	1	1	1	1	1	0

5. Der Verbindungsgeraden eines dreifachen Hauptpunktes mit dem einfachen ist der Kegelschnitt durch die fünf übrigen zugeordnet.

		α	β	γ	δ	ε	φ	ψ
1	6	3	3	2	2	2	2	1
γ	2	1	1	1	0	1	1	0
ε	2	1	1	1	1	1	0	0
	2	1	1	0	1	0	1	1

6. Der Verbindungsgeraden zweier doppelten Hauptpunkte, die verschiedenen Büscheln als Grundpunkte angehören, entspricht der Kegelschnitt durch die fünf übrigen Punkte.

*) Vgl. § 2, Seite 16.

		α	β	γ	δ	ε	φ	ψ
1	6	3	3	2	2	2	2	1
γ	2	1	1	1	0	1	1	0
ψ	1	1	1	0	0	0	0	0
δ	2	1	1	0	1	1	1	0
	1	0	0	1	1	0	0	1

7. Der Verbindungsgeraden eines doppelten Hauptpunktes mit dem einfachen, auf der stets noch ein doppelter liegt, sind die Punkte derselben Geraden zugewiesen.

Ist die erzeugende Kurve ein Kegelschnitt, der durch vier oder fünf der Hauptpunkte läuft, so erhält man nach demselben Verfahren folgende gegenseitige Zuordnungen:

		α	β	γ	δ	ε	φ	ψ
2	12	6	6	4	4	4	4	2
α	3	2	1	1	1	1	1	1
β	3	1	2	1	1	1	1	1
γ	2	1	1	1	0	1	1	0
ε	2	1	1	1	1	1	0	0
	2	1	1	0	1	0	1	0

8. Einem Kegelschnitt durch die beiden dreifachen und zwei solche doppelte Hauptpunkte, deren Verbindungsgerade nicht durch den einfachen läuft, entspricht ein Kegelschnitt durch die beiden einfachen und die zwei anderen doppelten Hauptpunkte.

		α	β	γ	δ	ε	φ	ψ
2	12	6	6	4	4	4	4	2
α	3	2	1	1	1	1	1	1
β	3	1	2	1	1	1	1	1
γ	2	1	1	1	0	1	1	0
ψ	1	1	1	0	0	0	0	0
	3	1	1	1	2	1	1	0

Einem Kegelschnitt durch die beiden dreifachen, einen doppelten und den einfachen Hauptpunkt gehört eine Kurve dritter Ordnung zu; sie hat in demjenigen
9. doppelten Hauptpunkte einen Doppelpunkt, der auf der Verbindungslinie des obigen mit dem einfachen liegt, und geht durch die übrigen doppelten und die dreifachen Punkte.

		α	β	γ	δ	ε	φ	ψ
2	12	6	6	4	4	4	4	2
α	3	2	1	1	1	1	1	1
β	3	1	2	1	1	1	1	1
γ	2	1	1	1	0	1	1	0
ε	2	1	1	1	1	1	0	0
ψ	1	1	1	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	1	0	1	0

Dem Kegelschnitt durch die beiden dreifachen, den einfachen und zwei solche doppelte Hauptpunkte, deren
10. Verbindungsgerade nicht durch die einfachen geht, entspricht die Verbindungsgerade der beiden anderen doppelten.

		α	β	γ	δ	ε	φ	ψ
2	12	6	6	4	4	4	4	2
α	3	2	1	1	1	1	1	1
γ	2	1	1	1	0	1	1	0
δ	2	1	1	0	1	1	1	0
ε	2	1	1	1	1	1	0	0
	3	1	2	1	1	0	1	0

Einem Kegelschnitte durch einen dreifachen und drei
11. doppelte Hauptpunkte gehört eine Kurve dritter Ordnung zu, die im anderen dreifachen einen Doppelpunkt hat, durch den zweiten dreifachen, den einfachen und drei

doppelte Hauptpunkte läuft, nämlich durch den vierten
11. vorhin übrigen und diejenigen beiden anderen, deren Verbindungsgerade durch den einfachen geht.

		α	β	γ	δ	ε	φ	ψ
2	12	6	6	4	4	4	4	2
α	3	2	1	1	1	1	1	1
γ	2	1	1	1	0	1	1	0
ε	2	1	1	1	1	1	0	0
ψ	1	1	1	0	0	0	0	0
	4	1	2	1	2	1	2	1

Einem Kegelschnitte durch einen dreifachen, den einfachen und zwei doppelte Hauptpunkte, deren Verbindungsgerade nicht durch den einfachen läuft, ist eine Kurve
12. 4ter Ordnung zugewiesen, die einmal durch dieselben vier Punkte geht und in den drei übrigen je einen Doppelpunkt besitzt.

		α	β	γ	δ	ε	φ	ψ
2	12	6	6	4	4	4	4	2
γ	2	1	1	1	0	1	1	0
δ	2	1	1	0	1	1	1	0
ε	2	1	1	1	1	1	0	0
φ	2	1	1	1	1	0	1	0
	4	2	2	1	1	1	1	2

Einem Kegelschnitte durch die vier doppelten Hauptpunkte entspricht eine Kurve vierter Ordnung durch
13. dieselben vier Punkte, die ausserdem in den beiden dreifachen und dem einfachen je einen Doppelpunkt besitzt.

		α	β	γ	δ	ε	φ	ψ
2	12	6	6	4	4	4	4	2
α	3	2	1	1	1	1	1	1
γ	2	1	1	1	0	1	1	0
δ	2	1	1	0	1	1	1	0
ε	2	1	1	1	1	1	0	0
φ	2	1	1	1	1	0	1	0
	1	0	1	0	0	0	0	1

Dem Kegelschnitte durch einen dreifachen und die
14. vier doppelten Hauptpunkte ist die Verbindungsgerade des anderen dreifachen und des einfachen zugeordnet.

		α	β	γ	δ	ε	φ	ψ
3	18	9	9	6	6	6	6	3
α	3	2	1	1	1	1	1	1
β	3	1	2	1	1	1	1	1
γ	2	1	1	1	0	1	1	0
δ	2	1	1	0	1	1	1	0
ε	2	1	1	1	1	1	0	0
φ	2	1	1	1	1	0	1	0
ψ	1	1	1	0	0	0	0	0
	3	1	1	1	1	1	1	1

Jeder Kurve dritter Ordnung des Netzes, dessen Grund-
15. punkte die sieben Hauptpunkte sind, ist eine Kurve desselben Netzes zugewiesen. (Vgl. § 5).

		α	β	γ	δ	ε	φ	ψ
3	18	9	9	6	6	6	6	3
α	3	2	1	1	1	1	1	1
β	3	1	2	1	1	1	1	1
2γ	4	2	2	2	0	2	2	0
δ	2	1	1	0	1	1	1	0
ε	2	1	1	1	1	1	0	0
φ	2	1	1	1	1	0	1	0
	2	1	1	0	1	0	0	1

Dem Büschel von Kurven dritter Ordnung, die alle durch die dreifachen und doppelten Hauptpunkte gehen und in einem der letzteren einen Doppelpunkt haben,
16. entspricht das Kegelschnittbüschel durch die beiden dreifachen, den einfachen und denjenigen doppelten Hauptpunkt, der auf der Verbindungsgeraden des obigen Doppelpunktes mit dem einfachen liegt.

		α	β	γ	δ	ε	φ	ψ
3	18	9	9	6	6	6	6	3
α	3	2	1	1	1	1	1	1
β	3	1	2	1	1	1	1	1
2γ	4	2	2	2	0	2	2	0
ε	2	1	1	1	1	1	0	0
φ	2	1	1	1	1	0	1	0
ψ	1	1	1	0	0	0	0	0
	3	1	1	0	2	1	1	1

Dem Büschel von Kurven dritter Ordnung, die durch die beiden dreifachen, den einfachen und drei doppelte Hauptpunkte laufen und in demjenigen der letzteren einen Doppelpunkt haben, auf dessen Verbindungsgeraden
17. mit dem einfachen Punkte kein Kurvenpunkt mehr liegt, entsprechen die Kurven dritter Ordnung eines Büschels, dessen Grundpunkte der vorhin fehlende doppelte Hauptpunkt als Doppelpunkt und die übrigen mit Ausnahme desjenigen bilden, der vorhin gemeinsamer Doppelpunkt war.

		α	β	γ	δ	ε	φ	ψ
3	18	9	9	6	6	6	6	3
2α	6	4	2	2	2	2	2	2
γ	2	1	1	1	0	1	1	0
δ	2	1	1	0	1	1	1	0
ε	2	1	1	1	1	1	0	0
φ	2	1	1	1	1	0	1	0
ψ	1	1	1	0	0	0	0	0
	3	0	2	1	1	1	1	1

Jeder Kurve dritter Ordnung durch den einfachen und die vier doppelten Hauptpunkte, die ausserdem in dem einen dreifachen einen Doppelpunkt hat, entspricht eine Kurve dritter Ordnung durch dieselben ersten fünf Punkte, die aber ihren Doppelpunkt im anderen dreifachen Hauptpunkte besitzt.

Aus dem Charakter der vorliegenden Transformation geht hervor, dass alle die bisher gefundenen Zuordnungen auch umgekehrt gelten. Jedem Punkte der zweiten Kurve ist immer ein Punkt der zuerst genannten zugewiesen. So ist auch z. B. 10. die Umkehrung von 6., 14. von 5. und 16. von 9. Den soeben angeführten Beziehungen noch neue hinzuzufügen, würde zu weit führen.

---

§ 5.

Sich selbst entsprechende Elemente.

Ist S_1 ein beliebiger Kegelschnitt des Büschels B_1, so schneiden die Kegelschnitte von B_2 auf S_1 eine Involution ein, deren Doppelpunkte in der vorliegenden Verwandtschaft sich selbst entsprechen. Solche Coincidenzpunkte ergeben sich, sobald ein Kegelschnitt des einen Büschels vom zugeordneten des anderen Büschels berührt wird. Es handelt sich nun darum, die Ordnung der von diesen sich selbst entsprechenden Punkten erfüllten Kurve, der Coincidenzkurve C, zu ermitteln.

Sie schneidet S_1 in zwei Punkten, die im allgemeinen von α, β, γ, δ verschieden sind; ihr Verhalten in diesen vier Punkten bedarf einer besonderen Untersuchung. Wählen wir α als ersten davon, so ist die Frage zu beantworten, wie oft es vorkommt, dass die beiden von α und β verschiedenen Schnittpunkte zweier Kegelschnitte aus B_1 und B_2 sich in α vereinigen, oder wie viele Paare von Kegelschnitten in B_1 und B_2 vorhanden sind, die sich in α dreipunktig berühren.

Es sei t ein beliebiger durch α laufender Strahl; es giebt dann in B_1 und B_2 je einen Kegelschnit, der t in α

berührt. Diese beiden Kegelschnitte haben ausserdem noch β und einen anderen Punkt π gemeinsam. Verbinden wir π mit α durch die Gerade p, so ist jedem Strahle t eindeutig ein Strahl p zugeordnet.

Um zu erkennen, wie viele Strahlen t einem Strahle p zugehören, nehmen wir auf einem beliebigen p einen Punkt ξ an; durch ihn ist ein Kegelschnitt von B_1 bestimmt. In B_2 giebt es dann einen einzigen Kegelschnitt, der den letzteren in α berührt; er schneidet p im allgemeinen in dem von α und ξ verschiedenen Punkte η.

ξ und η erfüllen auf p eine quadratische Involution, die zwei Doppelpunkte besitzt. Einer von diesen fällt jedoch nach α. Denn sobald ξ nach α rückt, ist auch η in diesem Punkte gelegen; beide Kegelschnitte berühren p in α. Es giebt also in B_1 und B_2 nur noch ein einziges weiteres Paar von Kegelschnitten, die sich in α berühren und ausserdem in einem auf p gelegenen Punkte schneiden. Die gemeinsame Tangente t ist die einzige zu p zugeordnete Gerade.

Die Beziehung zwischen p und t ist daher eine Verwandschaft [1, 1]. Es sind darin 2 Coincidenzelemente vorhanden und somit in B_1 und B_2 2 Paare von in α osculierenden Kegelschnitten. Die Coincidenzkurve läuft also zweimal durch α.

Zwei in α osculierende Kegelschnitte berühren sich ausser in α in dem zu α unendlich benachbarten Punkte, der auf den Osculationstangente liegt. Die letztere hat daher mit der Coincidenzkurve C zwei unendlich nahe Punkte gemeinsam. Die Tangenten der beiden in α osculierenden Kegelschnittpaare aus B_1 und B_2 sind also zugleich Tangenten der beiden durch α laufenden Zweige von C. Da sie aber in α auch Tangenten der Hauptkurve C_α sind, die zu α gehört, so erkennen wir, dass sich die Coincidenzkurve und C_α in ihrem gemeinsamen Doppelpunkte α mit beiden Zweigen berühren.

Dasselbe gilt analog für β, den zweiten gemeinsamen Grundpunkt von B_1 und B_2.

Durch γ ist eindeutig ein Kegelschnitt in B_2 festgelegt, es giebt dann in B_1 nur einen einzigen, der ihn in γ berührt. γ ergiebt sich daher als einfacher Punkt der Coincidenzkurve. Dasselbe gilt von δ, ε, φ.

Auf dem durch γ in B_2 bestimmten Kegelschnitte S_γ schneiden die Kegelschnitte von B_1 ersichtlich eine parabolische Involution ein. Während früher auf jedem Kegelschnitte die auf ihm eingeschnittene Involution zwei gesonderte Doppelpunkte besass, sind diese jetzt in γ vereinigt. Die Verbindungslinie derselben geht nun in die in γ an S_γ gelegte Tangente über. Als Verbindungslinie zweier unendlich benachbarter Punkte der Coincidenzkurve ist sie aber auch Tangente an diese, d. h.

Die Coincidenzkurve berührt in jedem der doppelten Hauptpunkte der Transformation die dazu gehörige Hauptkurve, nämlich den Kegelschnitt, den er aus demjenigen der Büschel B_1 resp. B_2 aussondert, zu dessen Grundpunkten er nicht gehört.

Auf dem beliebigen Kegelschnitt S von B_1 liegen nun zunächst die beiden Doppelpunkte α und β, sowie die beiden einfachen Punkte γ und δ der Coincidenzkurve. Dazu kommen noch die beiden Doppelpunkte der von B_2 auf S eingeschnittenen Involution. S wird somit zusammen in 8 Punkten getroffen, die Coincidenzkurve ist also eine Kurve 4. Ordnung.

Jedes der Büschel B_1 und B_2 enthält 3 in Geradenpaare zerfallende Kegelschnitte. Betrachten wir von ihnen zunächst diejenigen vier, zu denen nicht die Gerade $\alpha\beta$ gehört, so ist stets der Schnittpunkt eines solchen Geradenpaares ein Punkt der Coincidenzkurve. Denn er bestimmt in dem jeweiligen anderen Büschel einen einzigen Kegelschnitt, der mit dem Geradenpaare ausser α und β nur diesen einen Punkt gemeinsam hat, in dem sich zwei einander entsprechende vereinigen. Wir erhalten somit 4 neue Punkte der Kurve als Schnittpunkte der Geradenpaare:

$\alpha\gamma$ und $\beta\delta$
$\alpha\delta$ und $\beta\gamma$
$\alpha\varepsilon$ und $\beta\varphi$
$\alpha\varphi$ und $\beta\varepsilon$

Die beiden noch übrigen Geradenpaare $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ sowie $\alpha\beta$ und $\varepsilon\varphi$ bestimmen 4 Punkte der Kurve. Denn den in $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ zerfallenden Kegelschnitt von B_1 berühren auf $\gamma\delta$ 2 Kegelschnitte des Büschels B_2, nämlich in den Doppelpunkten der Involution, die durch die Elemente von B_2 auf $\gamma\delta$ eingeschnitten wird. Wir erhalten somit 2 neue Punkte der Coincidenzkurve auf $\gamma\delta$ und analog 2 auf $\varepsilon\varphi$.

Weitere Punkte lassen sich mit Hilfe der in § 4 hergeleiteten Beziehungen finden. Der Verbindungslinie von ψ mit α oder β gehört der Kegelschnitt durch die 5 übrigen Hauptpunkte zu. Die beiden Schnitte dieses Kegelschnittes mit jener Geraden müssen daher entweder sich selbst oder sich gegenseitig entsprechen. Wäre das letztere der Fall, so müssten die beiden Kegelschnitte, die der eine in B_1 und B_2 festlegt, sich in jenem zweiten Punkte schneiden. Da nun aber auf der Verbindungsgeraden der beiden Punkte noch ein dritter Punkt der beiden Kegelschnitte liegt, nämlich α resp. β, so müssten beide Kegelschnitte zerfallen in die Gerade selbst und in $\gamma\delta$ resp. $\varepsilon\varphi$, was aber bei unabhängiger Lage der Hauptpunkte unmöglich ist. Wir erhalten somit auf jeder der Geraden $\alpha\psi$ und $\beta\psi$ zwei neue Punkte der Coincidenzkurve.

Der Verbindungslinie von γ oder δ mit ε oder φ entspricht der Kegelschnitt durch die 5 übrigen Hauptpunkte. Jede solche Gerade trifft den zugehörigen*) Kegelschnitt in zwei Punkten. Würden diese beiden sich gegenseitig entsprechen, so müssten die Kegelschnitte, die der eine in B_1 und B_2 festlegt, mit jener Geraden je drei Punkte gemeinsam haben. Sie müssten also in diese Gerade und in eine andere zerfallen, auf der die beiden dreifachen und die

*) Vgl. § 4 No. 6.

beiden übrigen doppelten Hauptpunkte liegen würden. Das ist aber unmöglich, die erwähnten Schnittpunkte entsprechen also sich selbst. Da es ferner vier Verbindungslinien der angegebenen Art giebt, so erhalten wir 8 neue Punkte der Coincidenzkurve.

Für die in der Verwandschaft sich selbst entsprechenden Punkte ist:

$$y_1 : y_2 : y_3 = x_1 : x_2 : x_3$$

Die Gleichung der Coincidenzkurve ergiebt sich dadurch aus den Transformationsgleichungen in der doppelten Form

$$c_\alpha x_1 - \varepsilon_1 \gamma_1 x_3^2 s_\alpha = 0$$
$$c_\beta x_2 - \varepsilon_2 \gamma_2 x_3^2 s_\beta = 0$$

Beide Gleichungen sind identisch, die Glieder der zweiten haben nur durchweg das entgegengesetzte Vorzeichen wie die der ersten. Zum Nachweis dieser Thatsache multiplizieren wir die linken Seiten noch mit $x_1 x_2$ und zeigen, dass deren Summe identisch 0 wird. Da nach § 1

$$c_1 = \varepsilon_1 \gamma_1 x_1 s_\alpha \text{ und}$$
$$c_2 = \varepsilon_2 \gamma_2 x_2 s_\beta$$

ist, so lautetet die Summe:

$$\begin{aligned}
&c_\alpha x_1^2 x_2 + c_\beta x_1 x_2^2 - c_1 x_2 x_3^2 - c_2 x_1 x_3^2 \\
&= \gamma_2 \varepsilon_3 \varphi_3 x_1^2 x_2 g_2 s_3 - \varepsilon_2 \gamma_3 \delta_3 x_1^2 x_2 g_1 s_4 + \gamma_1 \varepsilon_3 \varphi_3 x_1 x_2^2 g_2 s_1 \\
&\quad - \varepsilon_1 \gamma_3 \delta_3 x_1 x_2^2 g_1 s_2 - \varepsilon_1 \gamma_1 \gamma_2 x_2 x_3^2 g_1 s_2 \\
&\quad + \gamma_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 x_2 x_3^2 g_2 s_1 - \varepsilon_2 \gamma_1 \gamma_2 x_1 x_2^2 g_1 s_4 \\
&\quad + \gamma_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 x_1 x_3^2 g_2 s_3 \\
&= - g_1 (\varepsilon_1 x_2 s_2 + \varepsilon_2 x_1 s_4)(\gamma_3 \delta_3 x_1 x_2 + \gamma_1 \gamma_2 x_3^2) \\
&\quad + g_2 (\gamma_1 x_2 s_1 + \gamma_2 x_1 s_3)(\varepsilon_3 \varphi_3 x_1 x_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 x_3^2)
\end{aligned}$$

Nennen wir die letzten Faktoren der beiden Produkte p und q und setzen in den mittleren für $s_1, \ldots s_4$ die Werte aus § 1 ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&- g_1 [x_3 g_2 (\varepsilon_1 \varepsilon_3 x_2 + \varepsilon_2 \varphi_3 x_1) + g_2 g_4 g_6] p \\
&+ g_2 [x_3 g_1 (\gamma_1 \gamma_3 x_2 + \gamma_2 \delta_3 x_1) + g_1 g_3 g_5] q \\
&= g_1 g_2 [q \cdot (\gamma_1 \gamma_3 x_2 x_3 + \gamma_2 \delta_3 x_1 x_3 + g_3 g_5) \\
&\quad - p \cdot (\varepsilon_1 \varepsilon_3 x_2 x_3 + \varepsilon_2 \varphi_3 x_1 x_3 + g_4 g_6)]
\end{aligned}$$

Darin ist aber unter Benützung der Werte aus § 1

$$g_3 g_5 = p - \gamma_1 \gamma_3 x_2 x_3 - \gamma_2 \delta_3 x_1 x_3$$

$$g_4 g_6 = q - \varepsilon_1 \varepsilon_3 x_2 x_3 - \varepsilon_2 \varphi_3 x_1 x_3 \quad .$$

Wir erkennen also, dass die Summe identisch verschwindet.

Die angeführten Gleichungen der Coincidenzkurve C zeigen ebenfalls, dass C von der 4ten Ordnung ist. C hat in α und β je einen Doppelpunkt, da in der Gleichung Grössen mit x_1^3, x_2^3, x_1^4, x_2^4 fehlen. Durch ψ läuft sie nicht, da ein Glied mit x_3^4 auftritt. Dagegen enthält C die Punkte γ, δ, ε, φ, weil deren Koordinaten c_α, c_β, s_α, s_β annullieren. Auch die vier Schnittpunkte von $x_1 = 0$ und $s_\alpha = 0$ sowie $x_2 = 0$ und $s_\beta = 0$ liegen auf ihr, wie sich sofort aus den obigen Gleichungen ergiebt.

Wir wollen noch die Schnittpunktsysteme der Coincidenzkurve C mit den wichtigsten in der Transformation auftretenden Kurven untersuchen.

Die Hauptkurve dritter Ordnung C_α schneidet sie in 12 Punkten, von denen je einer in γ, δ, ε, φ liegt, 2 in β und 6 in α sich befinden. Denn in α berührt C_α beide Zweige von C. Die 6 Hauptpunkte ausser ψ bilden also das vollständige Schnittsystem von C_α mit C und analog von C_β mit C.

Jeden Hauptkegelschnitt trifft C in 8 Punkten. Davon liegen je 2 in α und β, 2 ausserdem in dem doppelten Hauptpunkte, zu dem der Kegelschnitt gehört, und je einer in den beiden weiteren Hauptpunkten, durch die er geht. Ausserhalb der Hauptpunkte hat also C keinen Schnittpunkt mit einem Hauptkegelschnitt gemeinsam.

Der Kegelschnitt $s_\alpha = 0$ wird von C in 8 Punkten getroffen, von denen 2 in α und je einer in γ, δ, ε, φ liegt. Die beiden weiteren sind die vorhin auf $\psi\beta$ erkannten Coincidenzpunkte. Analog wird $s_\beta = 0$ von C 2mal in β, je einmal in γ, δ, ε, φ und in 2 Punkten von $\psi\alpha$ geschnitten.

Jede beliebige Gerade g der Ebene wird von C in 4 Punkten getroffen. Durch sie muss auch die Kurve C^6

hindurchgehen, die der Geraden g in der Transformation entspricht. Die beiden noch übrigen Schnittpunkte von C^6 und g müssen sich daher gegenseitig in der Verwandtschaft entsprechen. Wir finden somit:

> Jede Gerade der Ebene wird von der ihr entsprechenden Kurve 6ter Ordnung in 6 Punkten geschnitten, von denen 4 zugleich auf der Coincidenzkurve liegen und die beiden übrigen sich gegenseitig entsprechen.

C^6 und C schneiden sich in 24 Punkten. Davon liegen je 6 in α und β sowie je 2 in γ, δ, ε, φ. Die noch übrigen 4 befinden sich zugleich auf der Geraden g, der C^6 in der Transformation entspricht.

Bertini*) hat gezeigt, dass in einer involutorischen Transformation, deren Ordnung höher als 2 ist, mindestens eine Hauptkurve durch den Hauptpunkt läuft, zu dem sie gehört. Betrachtet man dann alle Kurven derselben Ordnung, die durch dieselben Hauptpunkte gehen, den obigen aber einmal weniger enthalten, so bildet deren Gesamtheit ein System, das in der Verwandtschaft sich selbst entspricht.

Unter den Hauptkurven kommen hier diejenigen in Betracht, die den dreifachen und den doppelten Hauptpunkten zugeordnet sind. Als erstes System ergiebt sich das Netz der Kurven dritter Ordnung**), die einmal durch alle 7 Hauptpunkten laufen. Aus der von Geiser***) aufgestellten Verwandtschaft ist sofort ersichtlich, dass jedem Punkte einer solchen Kurve ein anderer Punkt derselben Kurve entspricht. Denn legen wir durch die 7 Fundamentalpunkte und einen beliebigen achten Punkt der Kurve eine neue Kurve, so hat diese mit der ersten noch einen neunten gemeinsam, welcher dem achten zugeordnet ist. Das muss offenbar auch für den hier behandelten Spezialfall gelten. Da nun ψ, γ, δ, sowohl wie ψ, ε, φ, in gerader Linie liegen, so müssen die Schnittpunkte zweier Kurven des Systems einerseits mit α, β,

*) E. Bertini: „Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano". Annali di Mat. VIII, 255.

**) vgl. § 4. No. 15.

***) vgl. S. 7 unten.

ε, φ, und anderseits mit α, β, γ, δ, auf einem Kegelschnitte liegen. Legen wir also durch einen Punkt einer Kurve des Systems die Kegelschnitte aus B_1 und B_2, so ist deren letzter Schnittpunkt wieder ein Punkt jener Kurve. In der vorliegenden Transformation wird daher jede Kurve des Systems in sich selbst überführt, jeder Kegelschnitt von B_1 oder B_2 schneidet sie in zwei einander entsprechenden Punkten.

Mit der Concidenzkurve C hat jede dieser Kurven 12 Punkte gemeinsam, von denen je zwei in α nnd β, je einer in γ, δ, ε, φ, liegt. In jedem der übrigen 4 sich selbst entsprechenden Punkte der Kurve wird diese dann von den zugehörigen Kegelschnitten aus B_1 und B_2 berührt, d. h.

> Unter den Kegelschniten von B_1 und B_2 giebt es vier Paare, die eine beliebige durch die 7 Hauptpunkte gelegte Kurve dritter Ordnung und zugleich sich selbst berühren.

Ein zweites einfacheres System sich selbst entsprechender Kurven bilden die Kegelschnitte eines jeden der beiden Büschel B_1 und B_2, wie aus der Definition der Verwandtschaft sofort hervorgeht. Insbesondere erzeugen sich darin die beiden Geraden $\gamma\,\delta$ und $\varepsilon\,\varphi$ wieder, die als Teile von zerfallenden Kegelschnitten der beiden Büschel erkannt wurden.

---

§ 6.

Zerlegung der Transformation.

Jede Cremonasche Transformation lässt sich durch eine Reihe aufeinanderfolgender quadratischer Transformationen erzielen. Denn unter den Hauptpunkten der ersteren giebt es immer mindestens drei derartige, dass die Summe $r + s + t$ der Zahlen ihrer Vielfachheit grösser als die Ordnung n ist. Wählt man diese Punkte als die drei Hauptpunkte einer quadratischen Transformation, so wird durch die letztere jede Kurve n^{ter} Ordnung, die in der ursprünglichen einer Geraden entspricht, in eine Kurve von der Ordnung $2n - r - s - t < n$ übergeführt. Durch eine neue qua-

dratische Transformation, deren Hauptpunkte wieder in vielfachen Punkten der erhaltenen Kurve liegen, lässt sich deren Ordnung abermals erniedrigen. Dieses Verfahren ergiebt schliesslich als zugeordnete Kurve eine Gerade.

Die Zerlegung der von uns behandelten Transformation 6ter Ordnung hat schon Bertini allgemein angegeben*). Wählen wir etwa einen der vier doppelten Hauptpunkte, z. B. γ als Pol einer quadratischen Inversion, deren Grundkegelschnitt $\gamma\alpha$ und $\gamma\beta$ in α resp. β berührt und durch δ läuft, so geht durch diese erste quadratische Inversion eine Kurve 6ter Ordnung, die einer Geraden der Ebene entsprach, zunächst in eine solche 12ter Ordnung über, die je 6mal durch α, β, γ läuft. Von ihr sondern sich aber die Geraden $\gamma\alpha$ und $\gamma\beta$ je dreimal, ferner $\alpha\beta$ zweimal ab, so dass nur eine Kurve 4ter Ordnung bleibt, die nicht mehr durch γ, je einmal durch α, β, ψ' und je zweimal durch δ, ε', φ' läuft, wobei ψ', ε', φ' die den Punkten ψ, ε, φ entsprechenden sind.

Vollziehen wir nun eine zweite quadratische Transformation, z. B. eine Inversion, deren Pol δ ist und deren Grundkegelschnitt $\delta\varepsilon'$ und $\delta\varphi'$ in ε' resp. φ' berührt sowie durch ψ' läuft. Dann wird die gefundene Kurve 4ter Ordnung in eine solche 8ter Ordnung übergeführt, die viermal durch δ, ε', φ' und einmal durch ψ', α'', β'' geht. Da sich aber die Seiten des Dreiecks δ, ε', φ' zweifach von ihr abspalten, so ergiebt sich nur ein Kegelschnitt, der dem Dreieck ψ' α'' β'' umbeschrieben ist.

Dieser Kegelschnitt nun wird durch eine letzte quadratische Transformation, deren Hauptpunkte ψ', α'', β'' sind, in eine Gerade der Ebene übergeführt.

Die vorliegende Transformation lässt sich auch durch die Aufeinanderfolge zweier kubischen erreichen. Wählen wir α als doppelten und β, γ, δ, ε als einfache Hauptpunkte einer solchen, so geht eine Kurve 6ter Ordnung, die einer Geraden entsprach, zunächst in eine Kurve 18ter

*) a. a. O. vgl. § 5.

Ordnung über, die 12mal durch α und je 6mal durch β, γ, δ, ε läuft. Da sich aber dreimal der Kegelschnitt durch α, β, γ, δ, ε, dreimal die Gerade $\alpha\beta$ und je zweimal die Geraden $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\alpha\varepsilon$ davon absondern, so erhalten wir nur eine Kurve dritter Ordnung, die in φ' einen Doppelpunkt hat und einmal durch ψ', γ, δ, ε läuft.

Durch eine zweite kubische Transformation, deren Fundamentalpunkte φ' als Doppelpunkt und ψ', γ, δ, ε als einfache Punkte sind, wird die gefundene Kurve dritter Ordnung in eine Gerade transformiert.

---

§ 7.

Zugeordnete Punkte in zwei gleichartigen Verwandtschaften.

Wird in derselben Ebene ausser der bisher betrachteten Transformation durch zwei andere Büschel B_3 und B_4 mit denselben gemeinsamen Grundpunkten α, β noch eine zweite Verwandtschaft hergestellt, so entsteht die Frage, ob bezw. wie oft es vorkommt, dass zwei Punkte für beide Verwandtschaften einander zugeordnet sind.

Wir wollen der Betrachtung ein Koordinatendreieck zu Grunde legen, dessen erste Ecke $0 \mid 0 \mid 1$ ganz beliebig sei, während die beiden anderen wieder α $(1 \mid 0 \mid 0)$ und β $(0 \mid 1 \mid 0)$ seien. Die Gleichung eines jeden Kegelschnittes der vier Büschel ist dann von der Form

$$x_3^2 + a x_2 x_3 + b x_1 x_3 + c x_1 x_2 = 0.$$

Jedes der vier Büschel soll durch zwei seiner Kegelschnitte bestimmt werden und zwar

B_1 durch $S_1 \equiv x_3^2 + a_1 x_2 x_3 + b_1 x_1 x_3 + c_1 x_1 x_2 = 0$ und

$S_2 \equiv x_3^2 + a_2 x_2 x_3 + b_2 x_1 x_3 + c_2 x_1 x_2 = 0$,

B_2 durch $S_3 = 0$ und $S_4 = 0$, deren Gleichungen analog gebaut sind. Ebenso seien

B_3 durch $S_5 = 0$ und $S_6 = 0$ und

B_4 durch $S_7 = 0$ und $S_8 = 0$ definiert.

Durch jedes Punktepaar x, y der gesuchten Art geht zunächst je ein Kegelschnitt von B_1 und B_2; die Gleichung des ersteren sei $S_1 + \lambda S_2 = 0$, die des zweiten $S_3 + \mu S_4 = 0$. Durch x und y muss jedoch auch stets ein Kegelschnitt von B_3 und B_4 hindurchgehen. Beide erscheinen nun als Kegelschnitte des Büschels, dessen bestimmende Elemente

$$S_1 + \lambda S_2 = 0$$
$$S_3 + \mu S_4 = 0$$

sind.

Die Gleichung des ersten von ihnen besitzt daher die Form

$$(S_1 + \lambda S_2) + \nu (S_3 + \mu S_4) = 0$$
$$S_1 + \lambda S_2 + \nu S_3 + \rho S_4 = 0 \quad , \text{ worin}$$
$$\rho = \mu\nu \text{ ist.} \tag{1}$$

Als Kegelschnitt von B_3 muss sich seine Gleichung aber auch durch S_5 und S_6 darstellen lassen; es besteht somit eine Identität von der Form

$$S_1 + \lambda S_2 + \nu S_3 + \rho S_4 + \delta S_5 + \tau S_6 \equiv 0.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} 1 + \lambda + \nu + \rho + \delta + \tau &= 0 \quad , \\ a_1 + \lambda a_2 + \nu a_3 + \rho a_4 + \delta a_5 + \tau a_6 &= 0 \quad , \\ b_1 + \lambda b_2 + \nu b_3 + \rho b_4 + \delta b_5 + \tau b_6 &= 0 \quad , \\ c_1 + \lambda c_2 + \nu c_3 + \rho c_4 + \delta c_5 + \tau c_6 &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{2}$$

Der durch x und y laufende Kegelschnitt von B_4 hat zunächst die Gleichung

$$(S_1 + \lambda S_2) + \nu' (S_3 + \mu S_4) = 0$$
$$S_1 + \lambda S_2 + \nu' S_3 + \rho' S_4 = 0 \quad , \text{ worin}$$
$$\rho' = \mu\nu' \text{ ist.} \tag{3}$$

Hier besteht nun die Identität

$$S_1 + \lambda S_2 + \nu' S_3 + \rho' S_4 + \delta' S_5 + \tau' S_6 \equiv 0 \quad ,$$

aus der analog wie oben die Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 + \lambda + \nu' + \rho' + \delta' + \tau' &= 0 \\ a_1 + \lambda a_2 + \nu' a_3 + \rho' a_4 + \delta' a_7 + \tau' a_8 &= 0 \\ b_1 + \lambda b_2 + \nu' b_3 + \rho' b_4 + \delta' b_7 + \tau' b_8 &= 0 \\ c_1 + \lambda c_2 + \nu' c_3 + \rho' c_4 + \delta' c_7 + \tau' c_8 &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

folgen.

Die 8 Gleichungen (2) und (4) zwischen den neun Variablen λ, ν, ν', ρ, ρ', δ, δ', τ, τ' gestatten, eindeutig ν, ν', ρ, ρ' als Funktionen von λ zu bestimmen; es ergeben sich Werte von der Form

$$\nu = m\lambda + n \quad , \quad \nu' = m'\lambda + n' \quad ;$$
$$\rho = p\lambda + q \quad , \quad \rho' = p'\lambda + q' \quad .$$

Aus (1) und (3) folgt

$$\nu\rho' - \rho\nu' = 0 \quad \text{oder}$$
$$(m\lambda + n)(p'\lambda + q') - (m'\lambda + n')(p\lambda + q) = 0,$$

woraus wir zwei Werte von λ, nämlich λ_1 und λ_2, erhalten. Dadurch werden aus B_1 zwei Kegelschnitte ausgeschieden; jedem gehört ein einziger von B_2 zu, der durch

$$\mu_1 = \frac{S_1}{\nu_1} = \frac{p\lambda_1 + q}{m\lambda_1 + n} \quad \text{resp.} \quad \mu_2 = \frac{S_2}{\nu_2} = \frac{p\lambda_2 + q}{m\lambda_2 + n}$$

bestimmt ist. Die beiden Paare der von α und β verschiedenen Schnittpunkte dieser Kegelschnittpaare sind Punktepaare der gesuchten Art. Daher giebt es zweimal ein Punktepaar, das mit α und β sowie je einem von vier weiteren Punktepaaren auf einem Kegelschnitte liegt.

Berechnen wir aber ρ und ν allein aus (2) mit Hilfe von λ,

$$\rho = p\lambda + q \quad , \quad \nu = m\lambda + n$$

und damit $$\mu = \frac{\rho}{\nu} = \frac{p\lambda + q}{m\lambda + n}$$, so sind die von α und β verschiedenen Schnittpunkte von

$$S_1 + \lambda S_2 = 0 \quad \text{sowie}$$
$$S_3(m\lambda + n) + S_4(p\lambda + q) = 0$$

dann jedesmal zwei Punkte, die ausser auf Kegelschnitten von B_1 und B_2 auch auf einem solchen von B_3 liegen, durch die jedoch noch keiner von B_4 geht. Die Gleichung des Ortes solcher Punktepaare ergiebt sich durch Elimination von λ aus den beiden genannten Beziehungen und lautet

$$C_3 \equiv S_3(m S_1 - n S_2) + S_4(p S_1 - q S_2) = 0.$$

Der Ort für alle Punktepaare, die zugleich auf je einem Kegelschnitte von B_1, B_2 und B_3 liegen, ist eine Kurve vierter Ordnung C_3, die in α und β Doppelpunkte besitzt

und je einmal durch die weiteren Grundpunkte γ, δ, ε, φ, γ', δ' läuft.

Für die Punktepaare, die zugleich auf je einem Kegelschnitte von B_1, B_2 und B_4 liegen, ergiebt sich eine analoge Kurve 4 ter Ordnung mit der Gleichung

$$C_4 = S_3 (m' S_1 + n' S_2) + S_4 (p' S_1 + q' S_2) = 0$$

Sie geht durch γ, δ, ε, φ, ε', φ' je einmal und hat Doppelpunkte in α und β.

C_3 und C_4 treffen sich in 16 Punkten, von denen in α und β zusammen 8, in γ, δ, ε, φ zusammen 4 liegen. Die vier noch übrigen bilden die beiden vorhin gefundenen Punktepaare, deren Elemente in beiden Verwandtschaften einander zugeordnet sind.

Auch auf synthetisch geometrischem Wege gelangen wir zu denselben Ergebnissen. Wir bestimmen die erste Verwandtschaft durch die Büschel B_1 und B_2, deren Grundpunkte α, β, γ, δ und α, β, ε, φ seien. Die zweite Verwandtschaft sei durch die Kegelschnittbüschel B_3 und B_4 hergestellt, deren gemeinsame Grundpunkte wieder α und β seien, die weiteren Grundpunkte von B_3 seien γ' und δ', die von B_4 ε' und φ'.

Zunächst giebt es offenbar auch Punkte, die in beiden Transformationen sich selbst entsprechen, nämlich die Schnittpunkte ihrer beiden Coincidenzkurven 4. Ordnung. Beide haben in α und β je einen Doppelpunkt; sie schneiden sich also ausser in α und β noch in 8 weiteren Punkten.

Auf einem beliebigen Kegelschnitt S_3 in B_3 schneiden die Kegelschnitte von B_1 sowohl wie von B_2 je eine Involution ein; beide Involutionen haben ein Punktepaar ξ η gemeinsam, und dieses ist das einzige Punktepaar auf S_3, dessen Punkte sich in der durch B_1 und B_2 bestimmten Transformation entsprechen. Durchläuft nun S_3 das ganze Büschel B_3, so erfüllen diese Punktepaare eine Kurve C_3. Es handelt sich darum, deren Ordnung zu bestimmen. C_3 schneidet einen beliebigen Kegelschnitt S_3 von B_3 zunächst in dem Punktepaar ξ, η. Ferner läuft C_3 auch durch die

beiden von α und β verschiedenen Grundpunkte von B_3. Denn dem Punkte γ' entspricht in der Verwandtschaft ein Punkt η', durch den ein Kegelschnitt von B_3 eindeutig bestimmt ist. Auf diesem Kegelschnitte ist dann $\gamma'\,\eta'$ das Punktepaar, das die Kurve C_3 erzeugt. C_3 geht also durch γ' und analog durch δ'.

C_3 geht ferner durch jeden der von α und β verschiedenen Grundpunkte von B_1 und B_2. Denn dem Punkte γ entspricht in der Verwandtschaft der durch α, β, γ, ε, φ laufende Kegelschnitt S_γ. Durch γ ist aber auch ein einziger Kegelschnitt in B_3 bestimmt, der S_γ ausser in α, β und γ noch in einem Punkte η schneidet, so dass γ und η das auf C_3 gelegene Paar bilden, d. h. C_3 läuft durch γ und analog durch δ, ε, φ.

Um zu finden, wie oft C_3 durch α oder β läuft, haben wir zu untersuchen, wie oft einer der beiden Punkte ξ, η nach α oder β fällt, wenn S_3 sich im Büschel B_3 bewegt. C_3 erscheint aber auch als Ort der Punktepaare, durch die je ein Kegelschnitt der drei Büschel B_1, B_2, B_3 läuft. Wir haben bei dieser Auffassung die Frage zu beantworten, wie oft es vorkommt, dass drei sich in α oder β berührende Kegelschnitte der Büschel B_1, B_2, B_3 noch durch einen und denselben von α und β verschiedenen Punkt laufen.

Die vierten Schnittpunkte aller Kegelschnittpaare von B_1 und B_2, die sich in α berühren, erfüllen die Hauptkurve 3. Ordnung C_α, die in der Transformation dem dreifachen Hauptpunkte α entspricht. Jeder durch α gezogene Strahl t legt als Tangente betrachtet je einen Kegelschnitt in B_1 und B_2 fest und bestimmt so einen Punkt μ von C_α. Die Gerade t berührt aber auch einen einzigen Kegelschnitt von B_3, der C_α ausser in α und β noch in 3 anderen Punkten ν_1, ν_2, ν_3 trifft. Zwischen den Punkten μ und ν von C_α ist dadurch eine Korrespondenz [1, 3] hergestellt, die 4Coincidenzpunkte besitzt. Von ihnen sind 2 in α selbst gelegen. Denn in α osculieren zweimal zwei Kegelschnitte aus B_1 und B_2, sie berühren die Tangenten des Doppelpunktes α von C_α. Jedesmal giebt es dann einen Kegelschnitt in B_3,

der dieselbe Gerade in α und daher auch C_α in α berührt. So sind also 2 Coincidenzen in α erkannt worden.

C_3 geht mithin zweimal durch α und analog zweimal durch β, ferner durch die von α und β verschiedenen Grundpunkte γ' und δ' von B_3 und schneidet, wie anfangs bemerkt wurde, jeden Kegelschnitt dieses Büschels noch in 2 weiteren Punkten. C_3 ist also eine Kurve 4. Ordnung, die durch γ, δ, ε, φ, γ', δ' läuft und ausserdem in α und β je einen Doppelpunkt besitzt.

Zwischen den Punkten von C_3 ist eine eindeutige involutorische Verwandtschaft festgelegt; je zwei Punkte sind dabei einander zugeordnet, die sich in der durch B_1 und B_3 bestimmten Transformation entsprechen. Die Coincidenzpunkte dieser Verwandtschaft auf C_3 sind dann offenbar die Punkte, in denen sich drei Kegelschnitte aus den Büscheln B_1, B_2, B_3 in einem von α und β verschiedenen Punkte berühren. Alle Punkte nun, in denen sich zwei Kegelschnitte von B_1 und B_2 berühren, erfüllen die Coincidenzkurve der ursprünglichen Transformation. Ihre Schnittpunkte mit C_3 sind also die erwähnten Coincidenzen der Verwandtschaft auf C_3. Beide Kurven sind aber von der 4. Ordnung, beide haben je einen Doppelpunkt in α und β und gehen je einmal durch γ, δ, ε, φ. Von den 16 überhaupt vorhandenen Schnittpunkten sind daher 12 in diesen 6 Punkten gelegen. Ausserhalb derselben giebt es somit noch 4 Coincidenzen auf C_3.

> In drei Kegelschnittbüscheln mit zwei gemeinsamen Grundpunkten giebt es 4 Tripel von Kegelschnitten, die sich in einem von den Grundpunkten verschiedenen Punkte berühren.

Nehmen wir nun in der Ebene noch ein viertes Kegelschnittbüschel B_4 an, dessen Grundpunkte wieder α und β sowie zwei weitere Punkte ε' und φ' sind, so giebt es analog wieder einfach unendlich viele Tripel von Kegelschnitten in B_1, B_2, B_4, die sich ausser in α und β noch in je einem und demselben Punktepaare schneiden. Diese Punktepaare erfüllen auch hier eine Kurve 4. Ordnung C_4, die in α und

β je einen Doppelpunkt hat und je einmal durch γ, δ, ε, φ, ε', φ' läuft.

C_3 und C_4 schneiden sich in 16 Punkten, von denen offenbar 12 in α, β, γ, δ, ε, φ liegen. Es sei nun ξ einer der 4 weiteren Schnittpunkte. Dann entspricht ihm in der durch B_1 und B_2 festgelegten Verwandtschaft ein einziger Punkt. Dieser muss aber sowohl wieder auf C_3 als auch auf C_4 gelegen sein, d. h. einer der 3 weiteren Schnittpunkte von C_3 und C_4 sein. C_3 und C_4 schneiden sich also ausser in den Grundpunkten der Büschel noch zweimal in zwei entsprechenden Punkten der durch B_1 und B_2 erzeugten Transformation. Durch jedes dieser Punktepaare geht aber auch ein Kegelschnitt von B_3 sowie von B_4, das Punktepaar ist also auch ein solches, dessen Punkte sich in der analogen durch B_3 und B_4 hergestellten Verwandtschaft entsprechen. Wir finden somit:

Sind in der Ebene zwei Verwandtschaften der angegebenen Art durch die Büschel B_1 und B_2 sowie B_3 und B_4 festgelegt, so giebt es zwei Paare von Punkten, die sich gleichzeitig in jeder dieser beiden Verwandtschaften entsprechen.

Mit Hilfe der vier Kegelschnittbüschel B_1, B_2, B_3, B_4 lassen sich aber 6 Verwandtschaften der angegebenen Art aufstellen, so dass das eben gefundene Ergebniss allgemeiner lautet:

Sind in einer Ebene vier Kegelschnittbüschel mit 2 gemeinsamen Grundpunkten gegeben, so erzeugen je zwei von ihnen eine Cremonasche Transformation der behandelten Art. Es giebt dann in der Ebene zwei Paare von Punkten, die sich in jeder dieser 6 Verwandtschaften entsprechen.

Es giebt mithin in der Ebene nur zwei Punktepaare, die aus jedem von vier Kegelschnittbüscheln mit 2 gemeinsamen Grundpunkten je einen Kegelschnitt aussondern.

Sind insbesondere die beiden gemeinsamen Grundpunkte α und β die imaginären Kreispunkte der Ebene, so nimmt obiger Satz die Form an:

Es giebt in der Ebene nur 2 Punktepaare, von denen jedes mit jedem von 4 festen Punktepaaren auf einem Kreise liegt,

§ 8.

Reduktion der Transformation auf eine solche 5ter Ordnung.

Die bisher behandelte Transformation lässt sich reduzieren auf eine solche niederer Ordnung, sobald wir den Hauptpunkten spezielle Lagen geben. Nach den von Cremona und Cayley gegebenen Tabellen muss die übrig bleibende Transformation dann, sofern sie nicht ausartet, eine der folgenden sein:

	Ordnung	2	3	4	4	5	5	6
Zahl der Fundamentalpunkte	einfache	3	4	3	6	3	0	1
	doppelte	0	1	3	0	3	6	4
	dreifache	0	0	0	1	1	0	2

In der That wird sich jede dieser Transformationen, zuweilen sogar mehrfach, als Spezialfall der ursprünglichen erkennen lassen.

2.

Die erste Reduktion soll dadurch vorgenommen werden, dass wir die Verbindungsgerade $\alpha\beta$ durch ψ laufen lassen. Von der Kurve 6ter Ordnung, die bisher einer Geraden der Ebene entsprach, sondert sich nun die Gerade $\alpha\beta\psi$ ab. Als zugeordnetes Gebilde bleibt eine Kurve 5ter Ordnung, die in α, β, γ, δ, φ je einen Doppelpunkt besitzt. Die ursprüngliche Transformation hat sich somit auf eine solche 5ter Ordnung mit 6 doppelten Hauptpunkten reduziert. ψ ist aus der Reihe der letzteren ausgeschieden, jedem von ihnen entspricht der Kegelschnitt durch ihn selbst und diejenigen 4 weiteren Hauptpunkte, die nicht auf seiner Verbindungsgeraden mit ψ liegen. Alle in § 4 erwähnten Beziehungen bleiben erhalten, sofern nicht die betreffenden Kurven die Gerade $\alpha\beta$ absondern müssen, falls dies durch die Zahl

ihrer Punkte auf dieser Geraden bedingt wird. So entspricht z. B. der Verbindungslinie zweier Doppelpunkte, auf der ψ nicht liegt, die Verbindungslinie derjenigen beiden doppelten, die sich auf den Verbindungsgeraden von ψ mit jenen befinden. Denn der ursprünglich zugewiesene Kegelschnitt*) sondert die Gerade $\alpha\beta\psi$ ab, weil er drei Punkte mit ihr gemeinsam hat. Die Coincidenzkurve sondert die Gerade $\alpha\beta$ ab, es bleibt eine Kurve dritter Ordnung übrig, die je einmal durch α, β, γ, δ, ε, φ und ψ geht.

2.

Die Transformation geht in eine solche 5ter Ordnung mit einem dreifachen, drei doppelten und drei einfachen Hauptpunkten über, wenn wir die Vielfachheit eines dreifachen und zweier doppelter um je 1 erniedrigen. Zu diesem Zwecke brauchen wir nur diese drei Punkte auf einer Geraden anzunehmen. Dann sondert jede Kurve 6ter Ordnung der ursprünglichen Transformation diese Gerade ab. Wir wollen dabei zunächst den dreifachen Punkt auf der Verbindungslinie zweier solchen doppelten annehmen, die nicht mit ψ in einer Geraden liegen. Wählen wir z. B. β auf $\delta\varepsilon$, so entspricht jeder Geraden der Ebene nun eine Kurve 5ter Ordnung, die dreimal durch α, je zweimal durch β, γ, φ und je einmal durch δ, ε, ψ läuft. Zu α gehört die frühere Hauptkurve dritter Ordnung, den drei doppelten Punkten β, γ, φ sind der Reihe nach die Kegelschnitte zugewiesen, die durch ψ, ε, δ aus dem durch α, β, γ, φ bestimmten Büschel ausgeschieden werden, und den drei einfachen Punkten δ, ε, ψ entsprechen der Reihe nach die Verbindungsgeraden von α mit φ, γ, β.

Um die zugehörigen Transformationsgleichungen aus den ursprünglichen zu erhalten, haben wir darin $\delta_3 = \frac{\gamma_1}{\varepsilon_1} \cdot \varepsilon_3$ zu setzen, da $\gamma_1\varepsilon_3 - \delta_3\varepsilon_1 = 0$ ausdrückt, dass β auf $\delta\varepsilon$ liegt. Dadurch zerfallen s_β und c_β in:

*) § 4 No. 6.

$$s_\beta \equiv -\gamma_1 \cdot (x_1\varepsilon_3 - x_3\varepsilon_1)\cdot[x_1(\varepsilon_2\gamma_3 - \varphi_2\gamma_3) + x_2(\gamma_1\varphi_3 - \gamma_3\varepsilon_1) + x_3(\varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_2\gamma_1)],$$

$$c_\beta \equiv \frac{\gamma_1}{\varepsilon_3}\cdot\varepsilon_3\cdot(x_1\varepsilon_3 - x_3\varepsilon_1)\cdot[x_1x_2\gamma_3\varphi_3(\gamma_2\varepsilon_1 - \gamma_1\varepsilon_2) + x_2x_3\gamma_1\varepsilon_1(\gamma_2\varphi_3 - \gamma_3\varepsilon_2) + x_1x_3\gamma_2\varepsilon_2(\varepsilon_1\gamma_3 - \gamma_1\varphi_3)]$$

d. h. s_β in die Geraden $\delta\varepsilon\beta$ und $\gamma\varphi$ sowie c_β in die Gerade $\delta\varepsilon\beta$ und den durch α, β, γ, φ, ψ gehenden Kegelschnitt. In allen drei Transformationsgleichungen tritt nun rechts der Faktor $x_1\varepsilon_3 - x_3\varepsilon_1$ auf, sodass alle Kurven 6ter Ordnung die Gerade $\beta\delta\varepsilon$ absondern, woraus sich das oben Gesagte ergiebt.

Auch die Coincidenzkurve enthält die ganze Gerade $\beta\delta\varepsilon$, wie man aus ihrer Gleichung:

$$c_\beta x_2 - \gamma_2\varepsilon_2 x_3{}^2 s_\beta = 0$$

erkennt. Die übrig bleibende Kurve dritter Ordnung hat α zum Doppelpunkte und geht je einmal durch β, γ, φ, den Schnittpunkt von $\psi\alpha$ und $\gamma\varphi$ sowie die beiden Punkte, in denen $\psi\beta$ den durch α, γ, δ, ε, φ gelegten Kegelschnitt trifft.

3.

Hätten wir den einen dreifachen Hauptpunkt auf die Verbindungsgerade zweier doppelter gelegt, die auch ψ enthält, ginge also z. B. $\psi\gamma\delta$ durch β, so artet die Transformation aus. Einem beliebigen Punkte der Ebene entspricht stets ein Punkt jener Geraden, allen Punkten eines zu B_2 gehörigen Kegelschnittes ist ein und derselbe Punkt auf $\gamma\delta$ zugeordnet, nämlich sein zweiter Schnittpunkt mit dieser Geraden. Jedem Punkte von $\gamma\delta$ umgekehrt entsprechen alle Punkte desjenigen Kegelschnittes, den er aus B_2 aussondert.

Zu demselben Ergebnis führen die Transformationsgleichungen, wenn man darin $\gamma_1 = 0$ setzt. Unter Auslassung der gemeinsamen Faktoren lauten sie dann:

$$y_1 = 0$$
$$y_2 = \varepsilon_2 \cdot x_3 \cdot (x_1 \varepsilon_2 - x_2 \varepsilon_1)$$
$$y_3 = x_1 x_3 \cdot \varepsilon_2 (\varepsilon_3 + \varphi_3) - x_1 x_2 \varepsilon_3 \varphi_3 - x_3^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

---

§ 9.

Reduktion der Verwandschaft auf eine solche 4ter Ordnung.

1

Eine Transformation 4ter Ordnung mit drei doppelten und drei einfachen Hauptpunkten ergiebt sich aus der in § 8 unter 1. betrachteten, sobald eine der Geraden $\varepsilon\gamma$, $\gamma\varphi$, $\delta\varepsilon$, $\delta\varphi$ durch α oder β läuft. Geht z. B. $\varepsilon\delta$ durch β, so scheidet sich diese Gerade von allen Kurven 5ter Ordnung ab. Einer beliebigen Geraden der Ebene entspricht dann eine Kurve 4ter Ordnung, die je zweimal durch α, γ, φ und je einmal durch β, δ, ε läuft. Jedem der drei Doppelpunkte gehört der Kegelschnitt durch ihn selbst und diejenigen vier Punkte zu, die nicht mit ihm und ψ in gerader Linie liegen. Jedem der drei einfachen Punkte ist die Verbindungsgerade derjenigen beiden doppelten zugeordnet, die nicht auf seiner Verbindungslinie mit ψ liegen.

2

Auch aus der in § 8 unter 2. behandelten Transformation erhalten wir eine solche 4ter Ordnung mit drei doppelten und drei einfachen Hauptpunkten, wenn wir noch $\varepsilon\gamma$ oder $\delta\varphi$ durch α laufen lassen. Tritt z. B. das erstere ein, so scheidet sich von allen Kurven 5ter Ordnung noch die Gerade $\alpha\gamma\varepsilon$ ab. Der Gesamtheit der Geraden in der Ebene ist nun das Netz von Kurven 4ter Ordnung zugewiesen, die in α, β, φ je einen Doppelpunkt, in δ, ψ, γ je einen einfachen Punkt haben und nicht mehr durch ε gehen. Jedem der drei Doppelpunkte gehört der Kegelschnitt zu, der durch

ihn und die vier Hauptpunkte läuft, die nicht auf seiner Verbindungsgeraden mit ε liegen. Jedem der drei einfachen Punkte ist die Verbindungslinie derjenigen beiden Doppelpunkte zugewiesen, die nicht auf seiner Verbindungsgeraden mit ε liegen.

Die zu dieser Transformation gehörigen Gleichungen erhalten wir aus den in § 8, $_2$ gefundenen, wenn wir darin noch $\gamma_3 = \frac{\gamma_2}{\varepsilon_2} . \varepsilon_3$ setzen. Dadurch zerfällt s_α in $\alpha\gamma\varepsilon$ und $\delta\varphi$ sowie c_α in $\alpha\gamma\varepsilon$ und den durch α, β, φ, δ, ψ laufenden Kegelschnitt. Auf den rechten Seiten der drei Gleichungen tritt somit noch der gemeinsame Faktor $x_2\varepsilon_3 - x_3\varepsilon_2$ auf, so dass nach dessen Abscheidung nur noch Funktionen 4 ten Grades in den x_i bleiben.

Die Coincidenzkurve sondert zunächst die Gerade $\alpha\gamma\varepsilon$ ab, wie sich aus

$$c_\alpha x_1 - \gamma_1\varepsilon_1 \; x_3{}^2 \; s_\alpha = 0$$

ergiebt. Nach § 8, $_2$ muss sie aber auch die Gerade $\beta\delta\varepsilon$ ganz enthalten, es bleibt nur der Kegelschnitt übrig, der durch α, β, φ sowie die beiden Schnittpunkte von $\gamma\varphi$ und $\psi\alpha$, $\delta\varphi$ und $\psi\beta$ bestimmt ist.

3.

Eine Transformation 4 ter Ordnung mit einem dreifachen und sechs einfachen Hauptpunkten erzielen wir, wenn wir zunächst wie in § 8, $_2$ eine Gerade abspalten, dann aber ausserdem durch denselben dreifachen Punkt auch noch die Verbindungsgerade der beiden übrigen Doppelpunkte laufen lassen. Geht z. B. $\gamma\varepsilon$ sowohl wie $\delta\varphi$ durch α, so sondern alle Kurven 6 ter Ordnung diese beiden Geraden ab, es bleibt ein Netz von Kurven 4 ter Ordnung zurück, die alle in β einenen dreifachen Punkt haben, durch die sechs übrigen Hauptpunkte jedoch nur einmal laufen. Zu β gehört wie bisher die Kurve dritter Ordnung, die ihn selbst zum

Doppelpunkt, die übrigen sechs zu einfachen Punkten hat. Jedem der letzteren entspricht die Verbindungsgerade des dreifachen Punktes mit der Gegenecke jenes einfachen in dem vollständigen Vierseit α, ψ; ε, δ; γ, φ.

Von einander zugewiesenen Gebilden möge nur erwähnt werden, dass den Punkten einer jeden Seite des genannten Vierseits Punkte derselben Seite zugeordnet sind. Jeder Diagonale entspricht der Kegelschnitt, der durch die vier nicht auf ihr liegenden Ecken und durch den dreifachen Hauptpunkt geht.

Die Transformationsgleichungen erhalten wir durch Einsetzen von $\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}\gamma_3$ und $\varphi_3 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}\delta_3$ in die ursprünglichen.

$$s_\alpha \equiv \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} \cdot (\gamma_1\varepsilon_2 - \gamma_2\varepsilon_1) \cdot (x_2\gamma_3 - x_3\gamma_2)(x_2\delta_3 - x_3\gamma_2)$$

$$c_\alpha \equiv \frac{\varepsilon_2^{\,2}}{\gamma_2^{\,2}} \cdot \gamma_3\delta_3(\gamma_1\varepsilon_2 - \gamma_2\varepsilon_1) \cdot x_1 \cdot (x_2\gamma_3 - x_3\gamma_2)(x_2\delta_3 - x_3\gamma_2).$$

Der Kegelschnitt $s_\alpha = 0$ zerfällt also in die Geraden $\alpha\gamma$ und $\alpha\delta$, während sich $c_\alpha = 0$ in die Geraden $\psi\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$ zerspaltet. Die beiden Geraden $\alpha\gamma$ und $\alpha\delta$ sondern sich nun von allen Kurven 6ter Ordnung ab, woraus das oben Gesagte folgt.

Auch die Coincidenzkurve scheidet $\alpha\gamma$ und $\alpha\delta$ ab. Dies folgt sofort aus ihrer Gleichung:

$$c_\alpha x_1 - \varepsilon_1\gamma_1 x_3^{\,2} s_\alpha = 0 \quad ,$$

welche die neue Gestalt annimmt

$$(x_2\gamma_3 - x_3\gamma_2)(x_2\delta_3 - x_3\gamma_2) \cdot (x_1^{\,2}\varepsilon_2\gamma_3\delta_3 - x_3^{\,2}\gamma_1\gamma_2\varepsilon_1) = 0.$$

Der übrig bleibende Kegelschnitt

$$x_1^{\,2}\varepsilon_2\gamma_3\delta_3 - x_3^{\,2}\gamma_1\gamma_2\varepsilon_1 = 0$$

zerfällt aber in die beiden Verbindungsgeraden von β mit den beiden Punkten, in denen $\psi\alpha$ den durch $\beta\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\varphi$ gelegten Kegelschnitt trifft.

§ 10.

Reduktion der Transformation auf eine solche dritter Ordnung.

1.

Geben wir den Hauptpunkten zunächst die in § 9, $_3$ erwähnte Lage und wählen wir dann noch den dreifachen auf der Verbindungsgeraden zweier einfachen, die nur diese beiden einfachen Punkte enthält, z. B. auf $\delta\varepsilon$ (oder auch $\gamma\varphi$), so scheidet sich auch diese Gerade von den Kurven 4ter Ordnung ab. Den Geraden der Ebene entspricht nun das Netz von Kurven dritter Ordnung, die in β einen Doppelpunkt besitzen und je einmal durch α, γ, φ, ψ laufen. Wir haben somit die Transformation auf eine solche dritter Ordnung reduziert, deren Hauptpunkte β, α, γ, φ, ψ in der angegebenen Vielfachheit sind. Dem Doppelpunkte β entspricht der Kegelschnitt durch β, α, γ, φ, ψ, jedem der einfachen Punkte α, γ, φ, ψ dagegen gehört die Verbindungsgerade von β mit seiner Gegenecke im Vierseit $\gamma\delta\varepsilon\varphi$ zu.

Die jetzigen Transformationsgleichungen ergeben sich aus den in § 9, $_3$ gefundenen, wenn wir darin noch $\varepsilon_1\delta_3 - \varepsilon_3\gamma_1 = 0$ d. h. $\delta_3 = \frac{\gamma_1}{\varepsilon_1}\cdot\varepsilon_3 = \frac{\gamma_1\varepsilon_2}{\gamma_2\varepsilon_1}\cdot\gamma_3$ setzen. Dadurch zerfällt s_β in die Geraden $\beta\delta\varepsilon$ und $\gamma\varphi$ sowie c_β in die Gerade $\beta\delta\varepsilon$ und den durch α, β, γ, φ, ψ laufenden Kegelschnitt. Von den dort gefundenen Kurven 4ter Ordnung sondert sich also stets noch die Gerade $\beta\delta\varepsilon$ ab, so dass eine Transformation dritter Ordnung mit den angegebenen Eigenschaften resultiert.

Die Coincidenzkurve besass in § 9, $_3$ die Gleichung:

$$x_1^2\varepsilon_2\gamma_3\delta_3 - x_3^2\gamma_1\gamma_2\varepsilon_1 = 0.$$

Durch den oben bestimmten Wert von δ_3 nimmt sie die Form an:

$$x_1^2\gamma_3^2\varepsilon_2^2 - x_3^2\gamma_2^2\varepsilon_1^2 = 0$$

$$(x_1\gamma_3\varepsilon_2 + x_3\gamma_2\varepsilon_1)(x_1\gamma_3\varepsilon_2 - x_3\gamma_2\varepsilon_1) = 0.$$

Darin ist nun $x_1\gamma_3\varepsilon_2 - x_3\gamma_2\varepsilon_1 = 0$ die in der neuen Weise geschriebene Gleichung von $\beta\delta\varepsilon$; als Ort sich selbst entsprechender Punkte finden wir daher die Gerade:

$$x_1'\gamma_3\varepsilon_2 - x_3\gamma_2\varepsilon_1 = 0 \quad ,$$

die β mit dem Schnittpunkte von $\psi\alpha$ und $\gamma\varphi$ verbindet.

2

Eine andere Reduktion der Transformation auf eine solche dritter Ordnung erreichen wir sofort dadurch, dass wir einen der doppelten Hauptpunkte, z. B. φ auf die Verbindungslinie der beiden dreifachen legen. Dadurch zerfallen alle Kegelschnitte von B_2 in die Gerade $\alpha\beta\varphi$ und einem durch ε gehenden Strahl. Jeder Punkt x der Ebene sondert einen Kegelschnitt von B_1 und einen Strahl im Büschel um ε aus, der zugeordnete Punkt y ist der zweite Schnitt beider Linien. Bewegt sich nun x auf einer Geraden g, so bestimmt jede seiner Lagen einen Kegelschnitt in B_1, ein zugeordneter Strahl im Büschel um ε ist ein solcher, der sich mit jenem auf g schneidet. Solcher Strahlen sind aber zwei vorhanden. Auf einer beliebigen Geraden l werden dadurch zwei Punktreihen eingeschnitten, deren Elemente sich in einer Verwandtschaft [2, 2] befinden. Denn ein Punkt ξ der ersten sondert einen Strahl im Büschel um ε aus, dessen Schnittpunkt mit g einen einzigen Kegelschnitt in B_1 festlegt, dieser trifft l in den zu ξ gehörigen Punkten η_1 und η_2. Umgekehrt bestimmt ein Punkt η der zweiten Reihe einen Kegelschnitt in B_1 und dadurch zwei Punkte auf g, deren Verbindungslinien mit ε l in ξ_1 und ξ_2 schneiden. Die vier Coincidenzelemente sind Punkte des erzeugten Gebildes. Unter ihnen befindet sich jedoch stets der Schnittpunkt ρ von g und l. Als Punkt der ersten Reihe bestimmt er den Strahl $\rho\varepsilon$, der g in ρ schneidet und einen Kegelschnitt in B_1 festlegt, von dessen Schnittpunkten mit l einer wieder nach ρ fällt. Als Punkt der zweiten Reihe sondert er einen Kegelschnitt in B_1 aus, der g in ρ und ρ' trifft; die zugehörigen Strahlen in $\rho\varepsilon$ und $\rho'\varepsilon$ begegnen l aber in zwei

Punkten, von denen einer mit ρ identisch ist. Statt einer Kurve 4ter Ordnung ergiebt sich somit die Gerade g und eine Kurve dritter Ordnung als Ort für y.

Legen wir l durch einen der vier Grundpunkte von B_1, z. B. durch δ, so besteht zwischen den Punktreihen auf ihr eine Korrespondenz [2, 1]. Ein beliebiger Punkt ξ der ersten bestimmt einen Strahl durch ε, dessen Schnittpunkt mit g einen Kegelschnitt aus B_1 aussondert. Dieser trifft l in zwei Punkten, von denen aber einer mit δ zusammenfällt. Jeder Punkt η der zweiten Reihe legt einen Kegelschnitt in B_1 fest, dessen Schnitte mit g zwei Strahlen durch ε bestimmen. Sie schneiden l in den zu η gehörigen Punkten ξ_1 und ξ_2. Jedem Punkte der ersten Reihe entspricht also einer der zweiten, jedem der zweiten sind zwei der ersten zugewiesen. Die drei Coincidenzelemente sind die von δ verschiedenen Schnitte der vorhin gefundenen Knrve 4ter Ordnung mit l, der vierte liegt in δ. Da δ nicht der Geraden g angehört, so muss er ein einfacher Punkt der übriggebliebenen Kurve dritter Ordnung sein.

Geht l durch ε, so fallen alle Punkte der ersten Involution nach ε. Der durch ε in B_1 bestimmte Kegelschnitt trifft g in zwei Punkten, die zugehörigen Strahlen aber schneiden l beide in ε. Die beiden ε entsprechenden Punkte coincidieren also mit ε, so dass in ε zwei Schnittpunkte jener Kurve 4ter Ordnung mit l liegen. Da ε ausserdem kein Punkt von g ist, so ist er Doppelpunkt der erhaltenen Kurve dritter Ordnung.

Die ursprüngliche Transformation hat sich somit auf eine solche dritter Ordnung reduziert, die ε als doppelten, α, β, γ, δ als einfache Hauptpunkte hat. Dem dopppelten entspricht als Hauptkurve der Kegelschnitt durch alle fünf Punkte, jedem einfachen ist seine Verbindungsgerade mit dem Doppelpunkte zugeordnet. Eine Gerade durch einen einfachen Punkt erzeugt einen Kegelschnitt durch die vier übrigen Hauptpunkte. Der Verbindungslinie zweier einfachen Punkte entspricht die Verbindungsgerade der beiden anderen einfachen.

Die zur vorliegenden Transformation gehörigen Gleichungen ergeben sich aus denen der ursprünglichen, wenn wir darin $\varphi_3 = 0$ setzen. Dabei geht s_α in $\varepsilon_2 \cdot s'_\alpha$ und s_β in $\varepsilon_1 \cdot s'_\beta$ über; c_α und c_β jedoch zerfallen und zwar in:

$$c_\alpha = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \gamma_3 \delta_3 \cdot x_3 \cdot (x_1 \gamma_2 - x_2 \gamma_1) \cdot (x_2 \varepsilon_3 - x_3 \varepsilon_2)$$

$$c_\beta = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \gamma_3 \delta_3 \cdot x_3 \cdot (x_1 \gamma_2 - x_2 \gamma_1) \cdot (x_1 \varepsilon_3 x_3 \varepsilon_1)$$

Die Gleichungen lauten also:

$$y_1 = \gamma_1 \cdot s'_\alpha \cdot (x_1 \varepsilon_3 - x_3 \varepsilon_1)$$

$$y_2 = \gamma_2 \cdot s'_\beta \cdot (x_2 \varepsilon_3 - x_3 \varepsilon_2)$$

$$y_3 = \gamma_3 \delta_3 \cdot (x_1 \gamma_2 - x_2 \gamma_1)(x_1 \varepsilon_3 - x_3 \varepsilon_1)(x_2 \varepsilon_3 - x_3 \varepsilon_2);$$

aus ihnen folgt ebenfalls das oben Gesagte.

Die sich selbst entsprechenden Punkte erfüllen eine Kurve dritter Ordnung mit der Gleichung:

$$\gamma_3 \delta_3 x_1 (x_1 \gamma_2 - x_2 \gamma_1)(x_2 \varepsilon_3 - x_3 \varepsilon_2) - \gamma_1 x_3 s'_\alpha = 0$$

$$\gamma_1 \delta_3 x_2 (x_1 \gamma_2 - x_2 \gamma_1)(x_1 \varepsilon_3 - x_3 \varepsilon_1) - \gamma_2 x_3 s'_\beta = 0.$$

Sie läuft durch die Punkte α, β, γ, δ, ε und ferner durch die Schnittpunkte von $\alpha\beta$ mit $\gamma\delta$, $\alpha\gamma$ mit $\beta\delta$, $\alpha\delta$ mit $\beta\gamma$. Weitere Punkte bekommt man durch folgende einfache Konstruktion. Man lege einen Kegelschnitt durch ε, γ, δ, β und einen beliebigen Punkt φ auf $\alpha\beta$, bestimme den Schnittpunkt ψ von $\gamma\delta$ und $\varphi\varepsilon$ und ziehe $\alpha\psi$. Die gemeinsamen Punkte dieser Geraden mit jenem Kegelschnitte entsprechen sich selbst.

§ 11.

Reduktion der Transformation auf eine quadratische.

1.

Um die ursprüngliche Verwandtschaft auf eine quadratische zu reduzieren, nehmen wir an, dass die dreifachen und die doppelten Hauptpunkte auf einem und demselben Kegelschnitte S liegen. Daraus folgt sofort, dass dann ψ, x, y

in einer Geraden gelegen sind. Die Kegelschnitte von B_1 wie B_2 begegnen sich paarweise auf einer jeden durch ψ gehenden Geraden und schneiden auf ihr zwei identische Punktinvolutionen ein, konjugierte Punkte sind auch einander entsprechende Punkte in der Transformation. Auf jeder solchen Geraden ist die Involution eindeutig bestimmt durch ihre Schnittpunkte mit S sowie ψ und den Schnitt mit $\alpha\beta$.

Zwischen den beiden Büscheln B_1 und B_2 besteht wie in § 3 eine Korrespondenz [2, 2], sie schneiden auf einer beliebigen Geraden l zwei Punktreihen ein, die sich in einer Verwandtschaft [4, 4] befinden. Zu den acht Coincidenzelementen gehören zunächst wieder die Schnitte ρ und σ von l mit g und $\alpha\beta$, ausserdem jetzt aber noch die Punkte π_1 und π_2, in denen l S trifft. Denn π_1 bestimmt in B_1 den Kegelschnitt S, der g in zwei Punkten schneidet; jeder davon legt in B_2 wieder S fest. Daher fallen von den vier Schnittpunkten mit l wieder zwei nach π_1, die beiden anderen liegen in π_2, so dass π_1 wie π_2 je zwei Coincidenzpunkte repräsentieren. Von der ursprünglichen Kurve 8ter Ordnung scheidet sich ausser g und $\alpha\beta$ nun noch zweimal der Kegelschnitt S ab. Der Geraden g entspricht also nur ein Kegelschnitt, der durch α, β und ψ läuft.

Dasselbe zeigen auch die Transformationsgleichungen. Sollen γ, δ, ε, φ auf einem durch α und β gehenden Kegelschnitte S liegen, so müssen ihr Koordinaten der Bedingung genügen:

$$\begin{vmatrix} \gamma_3^2 & \gamma_1\gamma_3 & \gamma_2\gamma_3 & \gamma_3\gamma_1 \\ \delta_3^2 & \gamma_1\gamma_2 & \gamma_2\delta_3 & \delta_3\gamma_1 \\ \varepsilon_3^2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_2\varepsilon_3 & \varepsilon_3\varepsilon_1 \\ \varphi_3^2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_2\varphi_3 & \varphi_3\varepsilon_1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

die sich leicht in die Form

$$(\gamma_3-\delta_3)(\varepsilon_3-\varphi_3)(\gamma_1\varepsilon_2-\gamma_2\varepsilon_1)(\gamma_1\gamma_2\varepsilon_3\varphi_3-\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma_3\delta_3) = 0.$$

bringen lässt. Dabei bedeutet

$\gamma_3 - \delta_3 = 0$ oder $\gamma_3 = \delta_3$, dass γ und δ unendlich benachbart sind,

$\varepsilon_3 - \varphi_3 = 0$ „ $\varepsilon_3 = \varphi_3$, dass φ nach ε rückt,

$\gamma_1 \varepsilon_2 - \gamma_2 \varepsilon_1 = 0$ „ $\varepsilon_1 = \lambda\gamma_1$, $\varepsilon_2 = \lambda\gamma_2$, dass ε und φ auf $\gamma\delta$ liegen. Soll also ein nicht zerfallender Kegelschnitt S alle 6 Punkte $\alpha, \ldots, \varphi$ getrennt enthalten, so muss

$$\gamma_1 \gamma_2 \varepsilon_3 \varphi_3 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \gamma_3 \delta_3 = 0$$ sein oder φ so gewählt werden, dass $\varphi_3 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \gamma_3 \delta_3}{\gamma_1 \gamma_2 \varepsilon_3}$ ist.

Durch Einsetzen dieses Wertes in die früher gefundenen Beziehungen folgt:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 \gamma_2 \varepsilon_3 \cdot S\alpha &= \varepsilon_2 \gamma_2 \cdot s \\
\gamma_1 \gamma_2 \varepsilon_3 \cdot S\beta &= -\varepsilon_1 \gamma_1 \cdot s \\
\gamma_1 \gamma_2 \varepsilon_3 \cdot C\alpha &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \gamma_3 \delta_3 \cdot s \cdot x_2 \\
\gamma_1 \gamma_2 \varepsilon_3 \cdot C\beta &= -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \gamma_3 \delta_3 \cdot s \cdot x_1 \quad ,
\end{aligned}$$

wobei $s = 0$ den festen Kegelschnitt S darstellt. Die Transformationsgleichungen nehmen dadurch die einfache Gestalt an:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \gamma_1 \gamma_2 x_1 x_3 \\
y_2 &= \gamma_1 \gamma_2 x_2 x_3 \\
y_3 &= \gamma_3 \delta_3 x_1 x_2 \quad .
\end{aligned}$$

α, β, ψ sind die Hauptpunkte dieser quadratischen Transformation; zu ψ gehört die Hauptgerade $\alpha\beta$, den Punkten α und β entsprechen ihre Verbindungsgeraden mit ψ.

Coincidenzkurve ist der Kegelschnitt:

$$x_1 x_2 \gamma_3 \delta_3 - x_3^2 \gamma_1 \gamma_2 = 0.$$

Er geht durch α und β, ferner durch die Schnittpunkte von $\alpha\gamma$ und $\beta\delta$, $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$, $\alpha\varepsilon$ und $\beta\varphi$, $\alpha\varphi$ und $\beta\varepsilon$ sowie durch die beiden Berührungspunkte der von ψ an S gelegten Tangenten. Er ist der Grundkegelschnitt der vorliegenden quadratischen Inversion; die Geraden $\psi\alpha$ und $\psi\beta$ berühren ihn in α resp. β.

2.

Zerfällt der Kegelschnitt S in ein Geradenpaar, so ergiebt sich meist dieselbe quadratische Inversion. Liegen z. B. γ, δ, ε, φ auf einer und derselben Geraden, so muss zunächst $\varepsilon_1 = \gamma_1$ und $\varepsilon_2 = \gamma_2$ werden. Daraus folgt:

$$s_\alpha \equiv \gamma_2 \cdot (x_1\gamma_2 - x_2\gamma_1) \cdot [x_2(\gamma_3\delta_3 - \varepsilon_3\varphi_3) - x_3\gamma_3(\gamma_3 + \delta_3) - (\varepsilon_3 + \varphi_3)],$$

$$s_\beta \equiv -\gamma_1 \cdot (x_1\gamma_2 - x_2\gamma_1) \cdot [x_1(\gamma_3\delta_3 - \varepsilon_3\varphi_3) - x_3\gamma_1((\gamma_3 + \delta_3) - (\varepsilon_3 + \varphi_3)],$$

$$c_\alpha \equiv \gamma_1\gamma_2 \cdot x_3 \cdot (x_1\gamma_2 - x_2\gamma_1) \cdot [x_2(\gamma_3\delta_3(\varepsilon_3 + \varphi_3) - \varepsilon_3\varphi_3(\gamma_3 + \delta_3)) - x_3\gamma_2(\gamma_3\delta_3 - \varepsilon_3\varphi_3)],$$

$$c_\beta \equiv -\gamma_1\gamma_2 \cdot x_3 \cdot (x_1\gamma_2 - x_2\gamma_1) \cdot [x_1(\gamma_3\delta_3(\varepsilon_3 + \varphi_3) - \varepsilon_3\varphi_3(\gamma_3 + \delta_3)) - x_3\gamma_1(\gamma_3\delta_3 - \varepsilon_3\varphi_3)].$$

Die Ecke ψ (0 | 0 | 1) des Koordinatensystems ist dabei unbestimmt geworden; legen wir sie nun in den Mittelpunkt der auf $\gamma\delta$ durch die beiden Punktpaare γ, δ und ε, φ bestimmten Involution, so wird $\gamma_3\delta_3 = \varepsilon_3\varphi_3$. Dann ist ferner

$$\gamma_3\delta_3(\varepsilon_3 + \varphi_3) - \varepsilon_3\varphi_3(\gamma_3 + \delta_3) = -\gamma_3\delta_3[(\gamma_3 + \delta_3) - (\varepsilon_3 + \varphi_3)],$$

und die Transformationsgleichungen nehmen dadurch die einfache Form an:

$$y_1 = \gamma_1\gamma_2 x_1 x_3$$
$$y_2 = \gamma_1\gamma_2 x_2 x_3$$
$$y_3 = \gamma_3\delta_3 x_1 x_2.$$

Wir erhalten also wieder eine quadratische Inversion, deren Grundkegelschnitt die unter 1. angegebenen Eigenschaften hat. Der Pol ist der Centralpunkt ψ der Involution, die γ, δ und ε, φ auf $\gamma\delta$ festlegen.

3

Zerfällt S in die Geraden $\varepsilon\delta\beta$ und $\varphi\gamma\alpha$, so liegt eine einfache weitere Spezialisierung der in § 10, 1 behandelten

Reduktion vor. Wir hätten nun $\delta_3 = \frac{\gamma_1}{\varepsilon_1} \cdot \varepsilon_3$ und zugleich $\gamma_3 = \frac{\gamma_2}{\varepsilon_2} \varphi_3$ zu setzen und würden dadurch die Gleichungen

$$y_1 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 x_1 x_3$$
$$y_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 x_2 x_3$$
$$y_3 = \varepsilon_3 \varphi_3 x_1 x_2$$

erhalten. Nehmen wir jedoch die Koordinaten von γ und δ als die bestimmenden Elemente an, wodurch die von ε und φ eindeutig mitbestimmt sind, so bleiben die unter 1. und 2. gefundenen Transformationsgleichungen ungeändert. Wir sehen damit die ursprüngliche Verwandtschaft auch bei dieser speziellen Lage der Fundamentalpunkte auf eine quadratische Inversion mit den angegebenen Eigenschaften reduziert.

4.

Degeneriert S in die Geraden $\alpha\beta\varphi$ und $\varepsilon\gamma\delta$, so ist ε mit ψ identisch, so dass $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} = 0$ wird. In den unter 1. für den allgemeinen Fall gefundenen Gleichungen treten diese Grössen aber nicht auf, so dass jene ungeändert bleiben. Fasst man andererseits die vorliegende Spezialisierung als weitere Reduktion der in § 10, $_2$ behandelten auf, so sind in den dort gefundenen Beziehungen obige Werte einzuführen. Dadurch wird:

$$s'_\alpha = \gamma_2 \varepsilon_2 \cdot x_3 \cdot (x_1 \gamma_2 - x_2 \gamma_1) \quad ,$$
$$s'_\beta = -\gamma_1 \varepsilon_1 \cdot x_3 \, (x_1 \gamma_2 - x_2 \gamma_1) \quad ,$$
$$c_\alpha = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \gamma_3 \delta_3 \cdot x_2 x_3 \, (x_1 \gamma_2 - x_2 \gamma_1) \quad ,$$
$$c_\beta = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \gamma_3 \delta_3 \cdot x_1 x_3 \cdot (x_1 \gamma_2 - x_2 \gamma_1) \quad .$$

Die Transformationsgleichungen lauten wie früher

$$y_1 = \gamma_1 \gamma_2 x_1 x_3$$
$$y_2 = \gamma_1 \gamma_2 x_2 x_3$$
$$y_3 = \gamma_3 \delta_3 x_1 x_2 \quad .$$

5.

Wählen wir α als Schnittpunkt von $\gamma\varepsilon$ und $\delta\varphi$, β als den von $\gamma\varphi$ und $\delta\varepsilon$, so reduziert sich die Transformation ebenfalls auf eine quadratische. Dieser Fall lässt sich auch als weitere Spezialisierung des in § 10, 1 behandelten ansehen. $\psi\alpha\beta$ ist das Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks $\gamma\delta\varepsilon\varphi$ geworden; zwischen den Büscheln B_1 und B_2 besteht wie früher eine Korrespondenz [2, 2], sie schneiden eine beliebige Gerade l in zwei Punktreihen, die sich in einer Verwandtschaft [4, 4] befinden. Von den acht Coincidenzelementen liegen ausser in den Schnittpunkten von l mit g und $\alpha\beta$ nun noch vier in den Schnitten von l mit $\gamma\varepsilon$, $\gamma\varphi$, $\delta\varepsilon$, $\delta\varphi$. Jeder dieser Punkte scheidet einen zerfallenden Kegelschnitt aus B_1 oder B_2 aus, der g in zwei Punkten trifft; diese sondern aus dem anderen Büschel wieder je einen zerfallenden Kegelschnitt aus. Die vier dadurch erhaltenen Geraden treffen aber l immer in den oben genannten vier Punkten, so dass einer von den vier jenem Punkte entsprechenden wieder in ihn hineinfällt.

Von der ursprünglichen Kurve C^8 scheiden sich also die sechs Geraden g, $\alpha\beta$, $\gamma\varepsilon$, $\gamma\varphi$, $\delta\varepsilon$, $\delta\varphi$ ab. Es bleibt ein Kegelschnitt übrig, der durch α, β und ψ läuft.

Die Koordinaten von δ, ε, φ lassen sich mit Hilfe der Eigenschaften des vollständigen Vierecks leicht aus denen von γ bestimmen und haben die Werte:

$$\delta(\gamma_1, \gamma_2, -\gamma_3) \quad , \quad \varepsilon(-\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \quad , \quad \varphi(-\gamma_1, \gamma_2, -\gamma_3).$$

Dadurch wird

$$s_\alpha = 2\,\gamma_1\gamma_2(x_3\gamma_2 - x_2\gamma_3)(x_3\gamma_2 + x_2\gamma_3)$$
$$s_\beta = 2\,\gamma_1\gamma_2(x_3\gamma_1 - x_1\gamma_3)(x_3\gamma_1 + x_1\gamma_3)$$
$$c_\alpha = 2\,\gamma_1\gamma_2\gamma_3^2 \cdot x_1 \cdot (x_3\gamma_2 - x_2\gamma_3)(x_3\gamma_2 + x_2\gamma_3)$$
$$c_\beta = 2\,\gamma_1\gamma_2\gamma_3^2 \cdot x_2 \cdot (x_3\gamma_1 - x_1\gamma_3)(x_3\gamma_1 + x_1\gamma_3)$$

und die Transformationsgleichungen lauten:

$$y_1 = \gamma_1^2 x_2 x_3$$
$$y_2 = \gamma_2^2 x_1 x_3$$
$$y_3 = \gamma_3^2 x_1 x_2$$

Einer beliebigen Geraden entspricht also ein Kegelschnitt durch α, β, ψ; jedem dieser Hauptpunkte ist die Verbindungsgerade der beiden anderen zugeordnet.

Ein Continuum sich selbst entsprechender Punkte ist nicht mehr vorhanden. Zwar kann jeder Punkt der Geraden $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\delta$ als solcher angesehen werden, ihm sind jedoch auch alle übrigen Punkte der betreffenden Geraden zugeordnet.

§ 12.

Übertragung der Verwandtschaft auf eine Fläche zweiter Ordnung.

Die bisher behandelte Verwandtschaft lässt sich nach der von Clebsch*) angegebenen Weise auf eine Fläche 2. Ordnung abbilden, indem jedem Punkte der Ebene ein Punkt der Fläche und umgekehrt zugeordnet wird. Dadurch ist dann auch eine eindeutige involutorische Verwandtschaft zwischen den Punkten der Fläche hergestellt. Im Folgenden wollen wir jedoch den umgekehrten Weg einschlagen. Wir werden auf einer Fläche 2. Ordnung zunächst eine bestimmte eindeutige involutorische Verwandtschaft hervorrufen, dann wollen wir diese auf eine Ebene abbilden und zeigen, dass die in der letzteren entstehende Verwandtschaft gerade die bisher untersuchte Transformation ist.

Es liege eine Fläche 2. Ordnung $\mathfrak{F}$ vor, die beiden auf ihr befindlichen Regelscharen seien R_1 und R_2. Ferner sei ein Strahlennetz mit den beiden Leitgeraden l_1 und l_2 gegeben, die $\mathfrak{F}$ in den Punkten C und D, E und F schneiden. Irgend ein Strahl des Netzes trifft dann $\mathfrak{F}$ in 2 Punkten X und Y; ordnen wir diese einander zu, so ist unter den

*) Clesch-Lindemann: Vorlesungen über Geometrie II, 414 ff.

**) Die Anregung zur Behandlung der folgenden Verwandtschaft verdanke ich Herrn Prof. Dr. F. London, auch die Untersuchungen des Herrn Dr. Pyrkosch über dieselbe Frage haben mir wertvolle Dienste geleistet.

Punkten der Fläche eine eindeutige involutorische Verwandtschaft hergestellt. Denn da im allgemeinen ein beliebiger Punkt des Raumes nur einen einzigen Strahl des Netzes bestimmt, so legt auch ein Punkt X der Fläche nur einen einzigen solchen fest, der $\mathfrak{F}$ noch in einem zweiten Punkte Y schneidet. Da ferner Y denselben Strahl im Netze aussondert, so entspricht dem Punkte Y wieder jener Punkt X.

Jedem Punkte X der Fläche ist so ein einziger Punkt Y zugewiesen. Diese Eindeutigkeit der Beziehung wird verschwinden, sobald entweder der durch X gehende Strahl des Netzes ganz in der Fläche liegt, also eine Erzeugende der Regelscharen R_1 oder R_2 ist, oder sobald X auf l_1 oder l_2 zu liegen kommt. Im allgemeinen haben aber eine Regelschar und ein Strahlennetz keine gemeinsamen Elemente, es bleibt daher nur die zweite der erwähnten Möglichkeiten zu erörtern, d. h. es ist zu untersuchen, was in der festgelegten Verwandtschaft den Punkten C, D, E, F entspricht. Jeder von ihnen bestimmt im Strahlennetze ein ganzes Strahlenbüschel, das er als Scheitel in derjenigen Ebene festlegt, die durch ihn und die nicht durch ihn laufende Leitgerade geht. Jenem Punkte entspricht also die Gesamtheit der Punkte, in denen diese Ebene der Fläche $\mathfrak{F}$ begegnet, d. h. ein Kegelschnitt.

Jedem der vier Punkte C, D, E, F ist in der Verwandtschaft auf der Fläche der Kegelschnitt zugeordnet, der durch ihn und die beiden auf der anderen Leitgeraden gelegenen Punkte bestimmt ist. Die Punkte C, D, E, F sind also in der Verwandtschaft zugleich sich selbst entsprechende Punkte.

Es sei r_1 eine beliebige Erzeugende der Regelschar R_1. Durchläuft nun X die Gerade r_1, so erfüllen die durch die verschiedenen Lagen von X bestimmten Strahlen des Netzes eine Regelfläche $\mathfrak{P}$ vom zweiten Grade, deren Leitgeraden l_1, l_2 und r_1 sind. Sie schneidet $\mathfrak{F}$ in einer Raumkurve 4. Ordnung, der aber die Gerade r_1 selbst angehört. Es bleibt

mithin eine Raumkurve 3. Ordnung übrig; sie ist die der Geraden r_1 in der Verwandtschaft zugeordnete Kurve. Da $\mathfrak{P}$ die Geraden l_1 und l_2 enthält, so läuft die erhaltene Raumkurve 3. Ordnung durch die Punkte C, D, E, F. Die Erzeugenden von R_1 und R_2 werden von einer auf der Fläche gelegenen Raumkurve n^{ter} Ordnung zusammen stets in n Punkten geschnitten. Die gefundene Kurve 3. Ordnung muss daher die Geraden der einen Schar je zweimal, die der anderen je einmal treffen. Nun ist aber r_1 eine Sehne dieser Kurve; im vorliegenden Falle werden daher alle Geraden von R_1 zweimal, alle von R_2 einmal von der Raumkurve geschnitten.

Einer Erzeugenden der Fläche $\mathfrak{F}$ entspricht eine Raumkurve 3. Ordnung auf $\mathfrak{F}$, die jeder Erzeugenden derselben Schar zweimal, jeder der anderen Schar einmal begegnet und die durch die vier festen Punkte C, D, E, F läuft.

Geht r_1 durch einen der vier Punkte C, D, E, F, so zerfällt die durch r_1, l_1, l_2 bestimmte Regelschar in zwei Strahlenbüschel. Bewegt sich X z. B. auf der durch C laufenden Erzeugenden c_1 von R_1, so hat das erste der beiden Büschel C als Scheitel und liegt in der durch C und l_2 bestimmten Ebene. Das zweite liegt in der durch c_1 und l_1 bestimmten Tangentialebene der Fläche $\mathfrak{F}$, sein Scheitel ist der Schnittpunkt P_2 dieser Ebene mit l_2. Die erste Ebene schneidet $\mathfrak{F}$ in dem durch C, E und F gehenden Kegelschnitt S_c, die zweite aber trifft $\mathfrak{F}$ in c_1 und in der durch D gehenden Erzeugenden d_2 von R_2. Die nach Abscheidung von c_1 übrig bleibende Raumkurve 3. Ordnung zerfällt daher in den Kegelschnitt S_c und die Gerade d_2. Alle Punkte von S_c sind jedoch dem Punkte C zugeordnet; den übrigen Punkten von c_1 entsprechen mithin der Reihe nach die Punkte von d_2.

Einer Erzeugenden der Fläche $\mathfrak{F}$, die durch einen der Schnitte von l_1 oder l_2 mit $\mathfrak{F}$ läuft, entspricht diejenige Erzeugende der anderen Schar, die

durch den jeweiligen zweiten Schnitt von l_1 resp. l_2 mit $\mathfrak{F}$ läuft.

Den Erzeugenden der einen Schar, die durch C, D, E, F laufen, entsprechen also der Reihe nach die Erzeugenden der anderen Schar, die durch D, C, F, E gehen.

Wir betrachten nun einen Kegelschnitt, der durch C und D oder E und F läuft. Wir legen z. B. durch l_1 eine beliebige Ebene $\mathfrak{E}$, die $\mathfrak{F}$ in einem Kegelschnitt K und l_2 in einem Punkte P schneidet. Alle durch P in $\mathfrak{E}$ gezogenen Geraden sind dann Strahlen des Netzes; jeder trifft also K in zwei Punkten, die in der Verwandtschaft einander zugeordnet sind. Die durch P in $\mathfrak{E}$ gezogenen Geraden schneiden K in Punktpaaren einer Involution; je zwei entsprechende Punkte der Involution sind zugleich Punkte, die sich in der Verwandtschaft auf $\mathfrak{F}$ entsprechen. Das Centrum der Involution auf K ist P, ihre Doppelpunkte sind die Berührungspunkte der beiden von P an K gelegten Tangenten. Diese beiden Punkte sind sich selbst entsprechende Punkte auf der Fläche.

Die Leitgeraden l_1 und l_2 sind Achsen zweier Ebenenbüschel, jedes derselben schneidet $\mathfrak{F}$ in einer einfachen Mannigfaltigkeit von Kegelschnitten, K_1 und K_2, die durch die Verwandtschaft in sich selbst übergeführt werden. Auf jedem solchen Kegelschnitte erzeugen die Paare entsprechender Punkte eine Involution, die Centren dieser Involutionen durchlaufen die Geraden l_1 und l_2.

In K_1 sowohl wie in K_2 befinden sich zwei zerfallende Kegelschnitte, sie werden von den beiden durch l_1 resp. l_2 gehenden Tangentialebenen der Fläche auf $\mathfrak{F}$ eingeschnitten. Sind c_1, d_1, e_1, f_1 die durch C, D, E, F laufenden Erzeugenden von R_1, c_2, d_2, e_2, f_2 die analogen der Schar R_2, so werden jene vier zerfallenden Kegelschnitte gebildet durch die Geradenpaare $c_1 d_2$ und $c_2 d_1$ in K_1, $e_1 f_2$ und $e_2 f_1$ in K_2. Die Schnittpunkte M_1, N_1, M_2, N_2 dieser Geradenpaare sind dann in der Verwandtschft sich selbst entsprechend. Denn es hat z. B. M_1 als Punkt von c_1 seinen zugeordneten auf d_2, als Punkt von d_2 aber auf c_1; der M_1 entsprechende Punkt liegt also mit ihm vereinigt.

Ehe wir dasu übergehen, die Kurve zu ermitteln, die einem beliebigen auf $\mathfrak{F}$ gelegenen Kegelschnitte entspricht, wollen wir zunächst die Kurve bestimmen, die von den in der Verwandtschaft sich selbst entsprechenden Punkten erfüllt wird. Diese Coincidenzpunkte liefern diejenigen Strahlen des Netzes, die $\mathfrak{F}$ berühren; es sind Berührungspunkte dieser Strahlen mit $\mathfrak{F}$. Wir untersuchen die von diesen Strahlen erfüllte Regelfläche. Ein Paar solcher Strahlen erhalten wir stets, sobald wir durch eine der Leitgeraden l_1 oder l_2 eine beliebige Ebene legen und von ihrem Schnittpunkt P mit der anderen Leitgeraden die Tangenten an den Kegelschnitt ziehen, in dem die Ebene die Fläche $\mathfrak{F}$ schneidet. Von jedem Punkte der Leitgeraden l_1 und l_2 gehen so stets zwei und nur diese zwei Erzeugenden der Regelfläche aus, die immer in einer durch die andere Leitgerade gelegten Ebene liegen. Wir erhalten somit eine windschiefe Regelfläche 4. Ordnung, welche die beiden Geraden l_1 und l_2 als Knotenkurve hat. Sie ist zugleich von der 4ten Klasse und vom Geschlecht 1*).

Auf jeder der beiden Knotenlinien giebt es Punkte, in denen eine Erzeugende der Fläche die ihr unendlich nahe schneidet. Ist X ein beliebiger Punkt auf l_2, so gehen von ihm zwei Erzeugende aus, die l_1 in zwei Punkten schneiden, die im allgemeinen verschieden sind. Von jedem dieser beiden Punkte läuft dann noch je eine zweite Erzeugende aus, die l_2 in den Punkten Y_1 und Y_2 treffen. Jedem Punkte X auf l_2 sind so zwei Punkte Y zugeordnet. Andererseits entsprechen jedem solchen Punkte Y zwei Punkte X, so dass auf l_2 eine Korrespondenz $[2, 2]$ zwischen X und Y festgelegt ist. Darin giebt es 4 Coincidenzpunkte, d. h. es befinden sich unter den ∞^1 Strahlenpaaren, die von den Punkten von l_1 ausgehen, 4 Paare von zusammenfallenden

*) Vgl. Sturm: Liniengeometrie I No. 40; II. No. 416, 417; III No. 590. Ferner Cremona: Mem. di Bologne 8. 1868. — Cayley: Philos. Trans. 1869. Die Regelfläche ist dort von Cremona als 11. Species, von Cayley als 1. Species behandelt.

Erzeugenden. Auf l_1 und, wie sich analog zeigen lässt, auf l_2 sind daher je 4 Cuspidalpunkte vorhanden.

Zu diesen 4 Punkten auf l_1 gehören zunächst C und D. Denn legen wir z. B. durch C und l_2 die Ebene, so schneidet diese $\mathfrak{F}$ in dem Kegelschnitte S_c, und die beiden von C aus an S_c gezogenen Tangenten fallen ersichtlich zusammen.

Legen wir ferner durch l_2 die beiden Tangentialebenen an $\mathfrak{F}$, die $\mathfrak{F}$ in M_2 und N_2 berühren und l_1 in P_1 und Q_1 schneiden, so sind P_1 und Q_1 die beiden weiteren Cuspidalpunkte auf l_1. Denn jede der beiden Ebenen schneidet $\mathfrak{F}$ in einem Geradenpaare. Die beiden von P_1 resp. Q_1 an einem solchen zerfallenden Kegelschnitt gelegten Tangenten sind dann in der Verbindungsgeraden von P_1 resp. Q_1 mit M_2 resp. N_2 paarweise vereinigt.

Die vier Cuspidalpunkte auf l_2 werden gebildet durch die Punkte E und F sowie durch die beiden Punkte P_2 und Q_2, die Schnittpunkte von l_2 mit den beiden durch l_1 an die Fläche gelegten Tangentialebenen, die $\mathfrak{F}$ in M_1 und N_1 berühren. Die 8 Torsallinien der Regelfläche sind zunächst die in C an S_c, in D an S_d, in E an S_e und in F an S_f gelegten Tangenten, ferner die 4 Verbindungsgeraden $P_1\ M_2$, $Q_1\ N_2$, $P_2\ M_1$, $Q_2\ N_1$.

Jede Erzeugende der Regelfläche 4. Grades hat mit der ursprünglichen Fläche $\mathfrak{F}$ zwei zusammenfallende Schnittpunkte gemeinsam. Die Schnittkurve 8. Ordnung beider Flächen ist daher eine doppelt zu zählende Raumkurve 4. Ordnung Γ auf $\mathfrak{F}$, längs der die Erzeugenden der Regelfläche 4. Grades die Fläche $\mathfrak{F}$ berühren. Γ ist die von den in der Verwandtschaft sich selbst entsprechenden Punkten erfüllte Kurve, die Coincidenzkurve. Die 8 Punkte C, D, E, F, M_1 N_1, M_2, N_2 waren vorhin als die Punkte erkannt, in denen die 8 Torsallinien die Fläche $\mathfrak{F}$ berühren, sie sind daher Punkte der Coincidenzkurve Γ. Die letztere läuft durch 8 feste Punkte auf $\mathfrak{F}$, und da dies im allgemeinen keine 8 associierten Punkte sind, so ist Γ durch sie eindeutig auf $\mathfrak{F}$ bestimmt.

Wir wählen nun einen beliebigen Kegelschnitt K auf $\mathfrak{F}$ und untersuchen die Regelfläche, die von den Strahlen des Netzes erzeugt wird, welche K treffen. Um die Ordnung der Fläche zu bestimmen, wählen wir noch eine beliebige Gerade g und suchen die Zahl der Erzeugenden, die g schneiden. Durch l_1, l_2 und g als Leitgeraden ist eine Regelfläche festgelegt; die gesuchte Zahl ist dann identisch mit der Zahl derjenigen Erzeugenden dieser Regelfläche, die K treffen. Deren giebt es aber 4, so dass die gesuchte Regelfläche R_4 eine solche 4. Ordnung ist. Jeder Punkt auf l_1 bestimmt mit l_2 eine Ebene, die K in zwei Punkten schneidet, und wir erkennen daraus, dass von jedem Punkte von l_1 und analog von l_2 zwei Erzeugende der Fläche ausgehen. Jede Erzeugende schneidet K im allgemeinen nur in einem Punkte. Der in der Ebene von K gelegene Strahl s des Netzes jedoch trifft K in 2 Punkten, ist also ein Doppelstrahl von R_4.

R_4 schneidet die Fläche $\mathfrak{F}$ in einer Raumkurve 8. Ordnung, von der K ein Teil ist. Es ergiebt sich daher als dem Kegelschnitt K entsprechendes Gebilde eine Raumkurve $\mathfrak{C}_6$ von der 6. Ordnung.

Legen wir durch l_1 eine beliebige Ebene, so schneidet diese K in 2 Punkten und enthält daher noch 2 Erzeugende von R_4. Die letzteren treffen $\mathfrak{F}$ noch in zwei weiteren Punkten, und diese sind die beiden einzigen Punkte, welche die Ebene mit $\mathfrak{C}_6$ ausser C und D gemeinsam haben kann. C und D und analog E und F sind daher Doppelpunkte auf $\mathfrak{C}_6$.

Trifft der Doppelstrahl s von R_4 den Kegelschnitt K in P und Q, so entsprechen sich P und Q gegenseitig in der Verwandtschaft. Auf jedem Kegelschnitt der Fläche giebt es also nur ein einziges Paar von Punkten, die sich in der Verwandtschaft entsprechen. $\mathfrak{C}_6$ schneidet K zunächst in P und Q; die 4 weiteren Schnittpunkte von $\mathfrak{C}_6$ und K sind zugleich Schnittpunkte von K mit der Coinzidenzkurve der Verwandtschaft.

Jede Erzeugende r von R_1 oder R_2 wird von 4 Erzeugenden von R_4 geschnitten. Sondern wir davon die-

jenige ab, die nach dem Schnittpunkte von r und K läuft, so schneiden die 3 übrigen r in Punkten von $\mathfrak{C}_6$. Jede Erzeugende der beiden Scharen auf $\mathfrak{F}$ wird daher von $\mathfrak{C}_6$ in drei Punkten geschnitten.

Zerfällt K in zwei Erzeugende von R_1 und R_2, so zerfällt auch $\mathfrak{C}_6$ und zwar in die beiden Raumkurven 3. Ordnung, die diesen Erzeugenden in der Verwandtschaft entsprechen. Beide schneiden sich ausser in C, D, E, F noch in einem Punkte, der dem Schnittpunkte der beiden Erzeugenden entspricht. Die eine Kurve trifft die Erzeugenden von R_1 zweimal, die von R_2 einmal, die andere Kurve dagegen alle von R_1 einmal und die von R_2 zweimal.

Läuft K durch einen oder mehrere der Punkte C, D, E, F, so scheidet $\mathfrak{C}_6$ stets die zu den betreffenden Punkten gehörigen Kegelschnitte ab. So entspricht einem durch C gehenden Kegelschnitt eine Raumkurve 4. Ordnung, die einmal durch C, E, F und zweimal durch D läuft. Einem Kegelschnitte durch C und D ist ein Kegelschnitt durch E und F, einem solchen durch C und E einer durch D und F zugeordnet.

Wir wollen nun die Untersuchung der Verwandtschaft auf $\mathfrak{F}$ abbrechen und ihre Beziehung zu der früher behandelten ebenen Transformation aufsuchen. Projizieren wir nämlich die Gebilde von $\mathfrak{F}$ aus einem beliebigen Punkte P von $\mathfrak{F}$ auf eine beliebige Ebene, so liefern die Punkte C, D, E, F auf der letzteren die Punkte γ, δ, ε, φ. Durch P laufen zwei Erzeugende a und b von $\mathfrak{F}$, die der Ebene in α und β begegnen. Ein Punkt X der Fläche bestimmt mit l_1 und l_2 zwei Ebenen, die sich in dem durch X festgelegten Strahl des Netzes scheiden. Sie haben mit $\mathfrak{F}$ die Kegelschnitte S_1 und S_2 gemeinsam, welche in die Kegelschnitte s_1 und s_2 der Bildebene übergehen. S_1 und S_2 treffen a und b, s_1 und s_2 laufen daher beide durch α und β. Da S_1 die Punkte C und D enthält, geht s_1 durch γ und δ, analog liegen ε und φ auf s_2. S_1 und S_2 schneiden sich auf $\mathfrak{F}$ in X und dem ihm in der dortigen Verwandtschaft entsprechenden Punkte Y. Daher treffen sich s_1 und s_2 in

der Bildebene ausser in α und β noch in den Projektionen x und y von X und Y.

Diese Verhältnisse bleiben offenbar erhalten, sobald X auf $\mathfrak{F}$ sich bewegt. s_1 und s_2 erfüllen dann zwei Kegelschnittbüschel B_1 und B_2 mit den gemeinsamen Grundpunkten α und β, zu denen als weitere Grundpunkte γ und δ bei B_1, ε und φ bei B_2 hinzutreten. Jede Lage von X sondert durch x einen einzigen Kegelschnitt in B_1 und einen in B_2 aus. Der vierte Schnittpunkt y beider ist der x entsprechende Punkt. In der Bildebene ergiebt sich als Projektion der Verwandtschaft auf $\mathfrak{F}$ ersichtlich die früher behandelte Transformation 6ter Ordnung.

P bestimmt einen Strahl dss Netzes, der $\mathfrak{F}$ noch in Q schneidet. Er trifft die Bildebene im Schnittpunkte ψ von $\gamma\delta$ und $\varepsilon\varphi$, sodass ψ als Projektion von Q erscheint.

Eine beliebige Gerade der Ebene überträgt sich auf $\mathfrak{F}$ als ein durch P laufender Kegelschnitt. Ihm entspricht in der Verwandtschaft auf $\mathfrak{F}$ eine Raumkurve 6ter Ordnung, die je zweimal durch C, D, E, F und einmal durch Q geht. Projizieren wir sie durch einen Kegel 6ter Ordnung auf die Ebene, so erhalten wir dort eine ebene Kurve 6ter Ordnung, die γ, δ, ε, φ zu Doppelpunkten hat und einmal durch ψ läuft. Die Raumkurve schnitt jede Erzeugende der Scharen R_1 und R_2 dreimal, also auch a und b; die ebene Kurve muss daher die Punkte α und β je dreimal enthalten.

Eine durch α gelegte Gerade liefert auf $\mathfrak{F}$ eine Erzeugende von R_2. Dieser entspricht eine Raumkurve dritter Ordnung, die je einmal durch C, D, E, F läuft und die Erzeugenden von R_1 in je einem, die von R_2 in je zwei Punkten schneidet. Die ebene Bildkurve ist daher auch von der dritten Ordnung und geht je einmal durch γ, δ, ε, φ. Da die Raumkurve a einmal, b zweimal schnitt, so muss β ein Doppelpunkt, α ein einfacher Punkt der ebenen Kurve sein. (Vgl. § 4 No. 1.)

Wird auf derselben Fläche $\mathfrak{F}$ noch eine zweite Verwandtschaft der bisher besprochenen Art mittels zweier Geraden l_3 und l_4 hergestellt, so entsteht auch hier die Frage, ob es Punktepaare giebt, deren Elemente in beiden Verwandtschaften einander zugeordnet sind. Ihre Ver-

bindungslinie muss dann die Eigenschaft haben, jede der vier Geraden l_1, l_2, l_3, l_4 zu schneiden. Nun erfüllen alle Geraden des Raumes, die l_1, l_2, l_3 begegnen, eine Regelfläche 2. Ordnung R_3, die von l_4 in zwei Punkten P_1 und P_2 in zwei Punkten getroffen wird. Die beiden durch P_1 und P_2 laufenden Erzeugenden der zweiten auf R_3 gelegenen Schar sind Geraden, die jede der vier Geraden l_1, l_2, l_3, l_4 schneiden. Jede von ihnen trifft $\mathfrak{F}$ in zwei Punkten, die offenbar in beiden Verwandtschaften einander zugeordnet sind.

Es giebt also auf $\mathfrak{F}$ zwei Punktepaare, deren Elemente sich in jeder der beiden Verwandtschaften entsprechen, die durch l_1, l_2 sowie l_3, l_4 auf ihr hergestellt wurden. Wie sich diese vier Punkte anch als Projektionen der vier gleichartigen in der ebenen Figur erkennen lassen, bietet der vorliegende einfache Nachweis für die Existenz dieser vier Punkte auf der Fläche ebenso ein einfaches Mittel, das Vorhandensein und die Zahl solcher Punkte in den beiden ebenen Transformationen zu erkennnen, da sich diese Punkte einfach als Projektion der vier Punkte der Fläche ergeben.

Wir könnten so die Eigenschaften der ebenen Transformation aus denen der Verwandtschaft auf $\mathfrak{F}$ mit Hilfe zweier Projoktionen vermitteln. Wir wollen dagegen umgekehrt aus den bekannten Beziehungen in der Ebene durch Übertragung auf die Fläche noch einige Eigenschaften der räumlichen Verwandtschaft bestimmen.

Eine Raumkurve n^{ter} Ordnung der Fläche liefert in der Bildebene eine Kurve n^{ter} Ordnung, die $\alpha_1$mal durch α und $\beta_1$mal durch β läuft, wobei $\alpha_1 + \beta_1 = n$ ist. Von der ihr dort*) entsprechenden Kurve $6n^{ter}$ Ordnung sondert sich daher die zu α gehörige Hauptkurve dritter Ordnung $\alpha_1$mal und die zu β gehörige $\beta_1$mal ab, so dass als zugeordnete Kurve nur eine solche $6n - 3\alpha_1 - 3\beta_1 = 6n - 3(\alpha_1 + \beta_1) = 3n^{ter}$ Ordnung bleibt. Diese geht dann noch $(3n - 2\alpha_1 - \beta_1)$ mal durch α und $(3n - \alpha_1 - 2\beta_1)$mal durch β. Wird sie

*) Clebsch. a. a. O., Seite 417 u. 418.

nun auf die Fläche projiziert, so scheidet sich von der entstehenden Raumkurve $6n^{ter}$ Ordnung $(3n - 2\alpha_1 - \beta_1)$mal die Gerade a und $(3n - \alpha_1 - 2\beta_1)$mal b ab, so dass nur eine Raumkurve von der Ordnung:

$$6n - (3n - 2\alpha_1 - \beta_1) - (3n - \alpha_1 - 2\beta_1)$$
$$= 3(\alpha_1 + \beta_1) = 3n$$

sich ergiebt. Da die ebene Kurve $3n^{ter}$ Ordnung durch jeden der vier Punkte γ, δ, ε, φ $2n - \alpha_1 - \beta_1 = n$ mal läuft, so muss die gefundene Raumkurve auch je n mal durch C, D, E, F gehen. Die ebene Kurve geht $(3n - 2\alpha_1 - \beta_1)$ mal durch α und $(3n - \alpha_1 - 2\beta_1)$ mal durch β; die Raumkurve muss deshalb die Erzeugenden von R_1 je $(3n - 2\alpha_1 - \beta_1)$mal die von R_2 je $(3n - \alpha_1 - 2\beta_1)$mal schneiden. Wir finden also:

> Einer Raumkurve n^{ter} Ordnung auf der Fläche, die durch keinen der Punkte C, D, E, F geht und jede Erzeugende von R_1 $\alpha_1$mal, jede von R_2 $\beta_1$mal schneidet, entspricht eine Raumkurve $3n^{ter}$ Ordnung, die je n mal C, D, E, F läuft und jede Erzeugende der ersten Schar $(3n - 2\alpha_1 - \beta_1)$mal, jede der zweiten Schar $(3n - \alpha_1 - 2\beta_1)$mal schneidet.

Für eine Erzeugende von R_1 ist:

$$n = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 1;$$

wir erhalten damit nach obigem Satze eine Raumkurve dritter Ordnung die je einmal durch C, D, E. F geht und jede Erzeugende von R_1 zweimal, jede von R_2 einmal schneidet.

Für einen beliebigen Kegelschnitt O ist:

$$n = 2, \quad a_1 = 1, \quad \beta_1 = 1.$$

Einem beliebigen Kegelschnitte ist eine Raumkurve 6ter Ordnung zugewiesen, die in C, D, E, F Doppelpunkte besitzt und jede Erzeugende der einen wie der andern Schar dreimal schneidet.

C, D, E, F können als die Hauptpunkte der vorliegenden räumlichen Verwandtschaft dritter Ordnung angesehen werden;

jedem von ihnen ist als Hauptkurve der Kegelschnitt zugeordnet, der durch ihn selbst und die Spuren der nicht durch ihn gehenden Geraden l_1 resp. l_2 läuft. So oft eine Kurve n^{ter} Ordnung der Fläche einen der vier Hauptpunkte enthält, sondert sich von der zugehörigen Kurve der zu dem betreffenden Hauptpunkte zugeordnete Kegelschnitt ab. Daraus ergeben sich folgende Beziehungen:

Einem Kegelschnitte durch zwei Hauptpunkte, von denen einer auf l_1, der andere auf l_2 liegt, entspricht ein Kegelschnitt durch die beiden anderen Hauptpunkte.

Einer Kurve dritter Ordnung durch die beiden Hauptpunkte anf l_1 resp. l_2 nnd einen auf l_2 resp. l_1, die alle Erzeugenden der einen Schar zweimal und die der anderen einmal schneidet, entspricht eine Kurve dritter Ordnung durch die beiden Hauptpunkte auf l_2 resp. l_1 und den zweiten auf l_1 resp. l_2 gelegenen, die jede Erzeugende der ersten Schar einmal, jede der andern zweimal trifft.

Auch die vorliegende räumliche Verwandtschaft ist einer überaus mannigfachen Spezialisierung fähig. Derartige Fälle lassen sich zunächst dadurch herstellen, dass die zu Grunde gelegte Fläche nur eine Schar von Erzeugenden oder auch keine reellen Erzeugenden mehr besitzt. Alle dabei auftretenden Beziehungen können mit Hilfe der zugehörigen ebenen Abbildung hergeleitet werden; ihre Behandlung würde hier zu weit führen.

Degeneriert insbesondere die zu Grunde gelegte Fläche zweiten Grades in ein Ebenenpaar, so wird jedem Punkte der einen Ebene einer der anderen zugewiesen. Der so erhaltene Spezialfall ist die bekannte Steinersche windschiefe Projektion.

Inhalt.

		Seite
	Einleitung	7
§ 1.	Entwickelung der Transformationsgleichungen	9
§ 2.	Bestimmung der Hauptpunkte und Hauptkurven	14
§ 3.	Ableitung der gefundenen Beziehungen auf synthetisch-geometrischem Wege	17
§ 4.	Einander zugeordnete Gebilde	22
§ 5.	Sich selbst entsprechende Elemente	31
§ 6.	Zerlegung der Transformation	38
§ 7.	Zugeordnete Punkte in zwei gleichartigen Verwandtschaften	40
§ 8.	Reduktion der Transformation auf eine solche 5. Ordnung	47
§ 9.	„ „ „ 4. Ordnung	50
§ 10.	„ „ „ 3. Ordnung	53
§ 11.	„ „ auf eine quadratische . . .	56
§ 12.	Übertragung der Verwandtschaft auf eine Fläche 2. Ordnung	62

Lebenslauf.

Ich, Wilhelm Wallstaff, evangelischer Konfession, bin am 2. August 1877 zu Halberstadt geboren als einziger Sohn des Monteurs Heinrich Wallstaff und seiner Ehefrau Alwine Wallstaff geb. Voigt. Den ersten Unterricht erhielt ich in der I. Bürgerschule zu Schöningen in Braunschweig, die ich 7 Jahre hindurch besuchte. Als meine Eltern Ostern 1890 nach Breslau übersiedelten, trat ich in die Quarta der Königl. Oberrealschule dieser Stadt ein. Die genannte Anstalt verliess ich Ostern 1897 mit dem Reifezeugnisse, um mich dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften zu widmen. Am 1. Mai 1897 wurde ich bei der philosophischen Fakultät der Königl. Universität zu Breslau immatrikuliert und am 9. Mai 1901 daselbst reimmatrikuliert. Ich besuchte die Vorlesungen der Herren Professoren und Docenten:

Baumgartner, Baeumker, Bose, F. Cohn †, H. Cohn, Ebbinghaus, Franz, Freudenthal, Heydweiller, Kükenthal, London, O. E. Meyer, Partsch, Rosanes, Stern, Sturm.

Ihnen allen sage ich meinen aufrichtigsten Dank für ihr stetes Wohlwollen und die Förderung, die sie mir während meines Studiums haben zu teil werden lassen.

Thesen.

1. Der Streit, ob der analytischen oder synthetischen Methode in der Geometrie der Vorrang gebühre, ist unnütz. Erst durch ihr Zusammenwirken bringen beide einen Fortschritt der Wissenschaft hervor.
2. Der bildende Wert der Geometrie in der Schule ist grösser als der der Algebra.
3. Das Meter ist kein Naturmass.